

### 3. kolokvij iz statistike

Praktična matematika

11. april 2007

1. (25) V posodi je 6 belih in 4 rdeče kroglice. Kroglice iz posode izbiramo naključno po vrsti brez vračanja. Naj bo  $X$  število belih kroglic, preden dobimo prvo rdečo kroglico,  $Y$  pa število belih kroglic med prvo in drugo rdečo kroglico.

- a. (15) Poiščite večrazsežno porazdelitev slučajnih spremenljivk  $X$  in  $Y$ .  
b. (10) Pokažite, da imata spremenljivki  $X$  in  $Y$  enako porazdelitev. Izračunajte porazdelitev  $Y$ .

*Namig: Porazdelitev  $X$  izračunajte posebej, ne kot robno porazdelitev. Nato uporabite simetrijo večrazsežne porazdelitve.*

2. (25) Porazdelitev slučajnih spremenljivk  $X$  in  $Y$  je dana z gostoto

$$p_{X,Y}(x, y) = cx^3y$$

za  $x, y \in [0, 1]$ .

- a. (5) Določite konstanto  $c$ .  
b. (10) Določite robni gostoti  $p_X(x)$  ter  $p_Y(y)$ .  
c. (10) Izračunajte še  $E(XY^3)$  ter  $\text{cov}(X, Y)$ .

3. (25) Naj bo  $n > 1$  dano naravno število. Slučajni spremenljivki  $X$  in  $Y$  imata porazdelitev dana z

$$P(X = k, Y = l) = \frac{1}{n(n-k)}$$

za  $1 \leq k < n$  in  $1 \leq l \leq n - k$  in

$$P(X = n, Y = 0) = \frac{1}{n}.$$

- a. (10) Izračunajte  $E(Y|X = k)$  za  $k < n$ .  
b. (15) Izračunajte še  $E(Y|X = n)$  in  $E(Y)$ .

4. (25) Za proces razvejanja  $Z_0, Z_1, \dots$  naj velja

$$G(s) = G_{Z_1}(s) = \left( \frac{1}{2 - s^2} \right)^{1/2}.$$

- a. (10) Izračunajte  $E(Z_2)$ .  
b. (15) Z matematično indukcijo pokažite, da je

$$G_n(s) = \left( \frac{n - (n-1)s^2}{n+1 - ns^2} \right)^{1/2}$$

in izračunajte  $P(Z_n = 0)$  za  $n = 1, 2, \dots$