FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko in mehaniko, Praktična matematika

Statistika

3. kolokvij

27. marec 2000

Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, na razpolago pa imate 90 minut.

Naloga	a.	b.	
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Na podstrešju se je naenkrat znašlo deset miši: sedem sivih in tri rjave. Urni maček Tom uspe vsako uro uloviti eno miš. Naj bo slučajna spremenljivka X število sivih miši na podstrešju po treh urah, Y pa število rjavih miši po treh urah.

a. (10) Ali sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni? Odgovor utemelji!

   Rešitev:

b. (15) Izračunaj upanje $E(\frac{X}{4-Y})$.

   Rešitev:

2. (25) Nepošten kovanec, kjer je verjetnost, da vržemo grb, enaka $\frac{1}{3}$, vržemo 42-krat zapored.

a. (15) Za $i = 1, 2, \ldots, 41$ definirajmo

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{če sta } i\text{-ti in } (i+1)\text{-ti met enaka} \\ 0, & \text{sicer} \end{cases} .$$

Izračunaj $\mathrm{var}(I_i)$ in $\mathrm{cov}(I_i, I_j)$ za različna indeksa i, j.

Rešitev: Po večkrat izpeljani formuli je:

$$\mathrm{var}(I_i) = P(I_i = 1) - P(I_i = 1)^2 = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) - \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{20}{81}.$$

Najprej opazimo, da sta indikatorja I_i in I_j neodvisna, če indeksa i in j nista zaporedna. Torej je $\mathrm{cov}(I_i, I_j) = 0$, če $|i - j| \geq 2$. V nasprotnem primeru računamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(I_i, I_{i+1}) &= E(I_i I_{i+1}) - E(I_i)E(I_{i+1}) = \\ &= \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3\right) - \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \\ &= \frac{2}{81}. \end{aligned}$$

b. (10) Za vsaka enaka zaporedna izida si napišemo točko. Naj bo X število točk po dvainštiridesetih metih. Izračunaj $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

Rešitev: Ob upoštevanju naloge a. dobimo:

$$E(X) = 41 \cdot E(I_i) = 41 \cdot \frac{5}{9} = \frac{205}{9} = 22,78$$

in

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X) &= \sum_{i=1}^{41} \mathrm{var}(I_i) + 2 \sum_{i>j} \mathrm{cov}(I_i, I_j) = \\ &= 41 \cdot \frac{20}{81} + 2 \cdot 40 \cdot \mathrm{cov}(I_i, I_{i+1}) = \\ &= \frac{820}{81} + \frac{160}{81} = \frac{980}{81} = 12,1\,. \end{aligned}$$

4. (25) V valeški pravljici "The Tale of Peredur ap Efrawg" obstaja čudežna čreda belih in črnih ovac. Vsako minuto bleja ovca, ki jo izbremo naključno ne glede na barvo in ne glede na prejšnje izbire izmed vseh N ovac. Če je bela, se ena od črnih ovac spremeni v belo, če pa je črna, se ena od belih ovac spremeni v črno. Če so vse ovce bele ali vse črne, se ne zgodi nič.

a. (10) Označite z X_k število belih ovac po k minutah, kjer je $k = 0, 1, 2, \ldots$.. Za vsak $0 \leq n \leq N$ izračunajte

$$P(X_{k+1} = l | X_k = n)$$

za vse možne l.

Rešitev: Razmišljamo takole: če je $X_k = n$, bo X_{k+1} enak ali $n+1$, ali $n-1$. Potrebujemo torej $P(X_{k+1} = n+1 | X_k = n)$ in $P(X_{k-1} = n-1 | X_k = n)$. Ker ovce izbiramo naključno, je prva verjetnost enaka verjetnosti, da smo med N ovcami izbrali eno od n belih, torej n/N, druga verjetnost pa je $(N-n)/N$. Razmislek velja za $1 \leq n \leq N-1$. Za poseben primer $n = 0$ ali $n = N$ velja

$$P(X_{k+1} = N | X_k = N) = 1$$

in

$$P(X_{k+1} = 0 | X_k = 0) = 1\,.$$

b. (15) Pokažite, da je za $1 \leq n \leq N-1$

$$E(X_{k+1} | X_k = n) = n - 1 + \frac{2n}{N}\,.$$

Rešitev: Razmišljamo takole: če je $X_k = n$, bo X_{k+1} enak ali $n+1$, ali $n-1$. Potrebujemo torej $P(X_{k+1} = n+1 | X_k = n)$ in $P(X_{k-1} = n-1 | X_k = n)$. Ker ovce izbiramo naključno, je prva verjetnost enaka verjetnosti, da smo med N ovcami izbrali eno od n belih, torej n/N, druga verjetnost pa je $(N-n)/N$. Za $1 \leq n \leq N-1$ torej velja

$$E(X_{k+1} | X_k = n) = (n+1)\frac{n}{N} + (n-1)\frac{N-n}{N}\,.$$

ali

$$E(X_{k+1} | X_k = n) = n - 1 + \frac{2n}{N}\,.$$