FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko in mehaniko

Verjetnostni račun in statistika

4. kolokvij

24. maj 2000

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, na razpolago pa imate 90 minut.

Naloga	a.	b.	
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) V modelu telefonskega omrežja predpostavljamo, da je število zasedenih enot v trenutku n neka slučajna spremenljivka X_n z rodovno funkcijo G_n. Naj bo $Y \sim \mathrm{Po}(\lambda)$. Za rodovne funkcije $G_0, G_1, \ldots$ velja $G_0(s) = 1$ in

$$G_{n+1}(s) = G_n((1-p) + ps)\, G_Y(s)\,,$$

kjer je G_Y rodovna funkcija spremenljivke Y in velja $p \in (0,1)$.

a. (15) Izračunajte $P(X_3 = 0)$.

Rešitev: Vemo, da je

$$G_Y(s) = e^{-\lambda(1-s)}\,.$$

Računamo $G_1(s) = G_Y(s) = e^{-\lambda(1-s)}$ *in*

$$\begin{aligned} G_2(s) &= G_1((1-p)+ps)\, G_Y(s) \\ &= e^{-\lambda(1-(1-p)-ps)}\, e^{-\lambda(1-s)} \\ &= e^{\lambda p(1-s)}\, e^{-\lambda(1-s)} \\ &= e^{\lambda(1+p)(1-s)}\,. \end{aligned}$$

Podobno računamo

$$\begin{aligned} G_3(s) &= G_2((1-p)+ps)\, G_Y(s) \\ &= e^{-\lambda(1+p)(1-(1-p)-ps}\, e^{-\lambda(1-s)} \\ &= e^{\lambda(1+p)p(1-s)}\, e^{-\lambda(1-s)} \\ &= e^{\lambda(1+p+p^2)(1-s)}\,. \end{aligned}$$

Sledi, da je

$$P(X_3 = 0) = G_3(0) = e^{-\lambda(1+p+p^2)}\,.$$

b. (10) Kakšna je porazdelitev spremenljivke X_n?

Rešitev: Po prvi točki domnevamo, da je

$$G_n(s) = e^{-\lambda(1+p+\cdots+p^{n-1})(1-s)}\,.$$

Dokažimo to še z matematično indukcijo. Za $n = 1$ *trditev velja po prvi točki. Recimo, da trditev velja za* n. *Računamo*

$$\begin{aligned} G_{n+1}(s) &= G_n((1-p)+ps)\, G_Y(s) \\ &= e^{-\lambda(1+p+\cdots+p^{n-1})(1-(1-p)-ps)}\, e^{-\lambda(1-s)} \\ &= e^{-\lambda(1+p+\cdots+p^{n-1})p(1-s)}\, e^{-\lambda(1-s)} \\ &= e^{-\lambda(1+p+\cdots+p^{n})(1-s)}\,. \end{aligned}$$

Trditev torej velja tudi za $n+1$. *Razberemo, da je* $X_n \sim \mathrm{Po}\big(\lambda(1+p+\cdots+p^{n-1})\big)$.

2. (25) Naj bo $Z_0, Z_1, \ldots$ proces razvejanja. Slučajno število Y potomcev vsakega posameznika naj ima porazdelitev

$$P(Y = k) = 2^{-(k+1)}$$

za $k = 0, 1, \ldots$.

a. (10) Z matematično indukcijo pokažite, da je rodovna funkcija $G_n(s)$ spremenljivke Z_n enaka

$$G_n(s) = \frac{n - (n-1)s}{n + 1 - ns}\,.$$

Rešitev: Najprej izračunamo

$$G(s) = G_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+1)} s^k = \frac{1}{2 - s}\,,$$

torej trditev drži za $n = 1$*. Predpostavljajmo, da drži za nek* n*. Dobimo*

$$\begin{aligned} G_{n+1}(s) &= G_n(G_1(s)) \\ &= \frac{n - (n-1)G(s)}{n + 1 - nG(s)} \\ &= \frac{n - (n-1)\frac{1}{2-s}}{n + 1 - n\frac{1}{2-s}} \\ &= \frac{n(2-s) - (n-1)}{(n+1)(2-s) - n} \\ &= \frac{(n+1) - ns}{n + 2 - (n+1)s} \end{aligned}$$

S tem je indukcijski korak zaključen.

b. (10) Izračunajte $E(Y)$ in $P(Z_n = 0)$ in izračunajte $P(\text{proces izumre})$. Kako se to ujema s teorijo?

Rešitev: Vemo, da je $E(Y) = G'(1)$*. Računamo*

$$G'(s) = \frac{1}{(2 - s)^2}\,,$$

torej je $E(Y) = 1$*. Vemo tudi, da je* $P(Z_n = 0) = G_n(0)$*, torej*

$$P(Z_n = 0) = \frac{n}{n + 1}\,.$$

Iz tega sledi

$$P(proces\ izumre) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0) = 1\,.$$

Splošna teorija za primer, ko je $E(Y) = 1$ *in je* $G''(1) > 0$ *napoveduje, da bo rodbina izumrla z verjetnostjo* 1*. Zgornji rezultat se torej ujema s splošno teorijo.*

3. (25) V podjetju HIT so v letu 1999 gostje igrali igro *Colore* 440.000-krat. Verjetnost za dobitek pri tej igri je $p = 0,00198079$.

a. (5) Zanima nas število S_n dobitkov v 440.000 igrah. To število je kot vsota 440.000 neodvisnih slučajnih spremenljivk z vrednostma 0 in 1, torej $S_n = X_1 + \cdots X_n$, kjer je $P(X_i = 1) = p$ in $P(X_i = 0) = 1 - p$. Z uporabo centralnega limitnega izreka izračunajte približno verjetnost, da bo dobitkov 920 ali več.

Upoštevajte: $\Phi(1,64) = 0,95$.

Rešitev: Po centralnem limitnem izreku je

$$
\begin{aligned}
P(S_n \geq 920) &= P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}} \geq \frac{920 - E(S_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}}\right) \\
&\approx P\left(Z \geq \frac{920 - E(S_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}}\right),
\end{aligned}
$$

kjer je $Z \sim N(0,1)$. *Računamo* $E(S_n) = np = 871,55$ *in* $\sqrt{\mathrm{var}(S_n)} = \sqrt{npq} = 29,49$. *Izračunamo*

$$
\frac{920 - E(S_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}} = \frac{920 - 871,55}{29,49} = 1,64\,.
$$

Iz tabele ali namiga razberemo, da je iskana verjetnost približno

$$
P(S_n \geq 920) = 0,050\,.
$$

b. (15) Recimo, da je izplačilo pri dobitku enako $x > 0$. Če gost stavi enoto in stavo dobi, mu to enoto vrnejo in dodajo še x enot. Pokažite, da je ta dobitek lahko največ $x = 502$, če naj bo verjetnost, da bo hiša po 440.000 igrah imela izgubo največ 0,01?

Upoštevajte: $\Phi(-2,33) = 0,01$.

Rešitev: Hiša v vsaki igri ali pridobi 1 *enoto, ali izgubi* x *enot. Dobiček hiše, ki je lahko tudi negativen v primeru izgube, je vsota 440.000 med sabo neodvisnih slučajnih spremenljivk, torej* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, *pri čemer je* $P(X_i = 1) = 1 - p$ *in* $P(X_i = -x) = p$. *Radi bi našli* x, *da bo*

$$
P(S_n < 0) = 0,01\,.
$$

Računamo $E(X_i) = 1 - p - px$ *in* $\mathrm{var}(X_i) = pq(x+1)$. *Sledi*

$$\begin{aligned} P(S_n < 0) &= P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}} < -\frac{E(S_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}}\right) \\ &\approx P\left(Z < -\frac{n(q-px)}{\sqrt{npq(x+1)}}\right) \\ &= 0,01\,. \end{aligned}$$

Vstavimo $x = 502$ *in dobimo*

$$-\frac{n(q-px)}{\sqrt{npq(x+1)}} = -2,33\,,$$

torej je verjetnot za izgubo enaka $0,01$. *Očitno bo ta verjetnost večja, če gostom izplačajo več, zato je izplačilo lahko največ* $x = 502$.

4. (25) Ponujena vam je naslednja igra na srečo: iz škatle, v kateri je veliko število listkov s števili, lahko naključno izberete 1000 listkov z vračanjem. Če je vsota izbranih števil med vključno a in $a + 100$, dobite stavo, sicer jo izgubite. Število a si lahko še izberete. O škatli veste le to, da je povprečje 0,1 in standardni odklon 1,5811.

a. (15) Kolikšna je vpribližno erjetnost, da boste stavo dobili, če si izberete $a = 0$? Stavo torej dobite, če je vsota med 0 in 100.

Rešitev: Uporabimo centralni limitni izrek. Označimo vsoto s S_{1000}. *Vemo, da je*

$$\begin{aligned} P(0 \leq S_n \leq 100) &= P(-100 \leq S_{1000} - 100 \leq 0) \\ &= P(-\frac{100}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811} \leq \frac{S_{1000} - 100}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811} \leq 0) \\ &\approx P(-2 \leq Z \leq 0) \\ &= 0,48\,. \end{aligned}$$

b. (10) Katera izbira za a je za vas najugodnejša? Utemeljite in izračunajte verjetnost za dobitek za izbrani a.

Rešitev: Če si predstavljamo histogram za vsoto S_{1000}, *vemo da bo simetričen okrog upanja* $\mu = 100$, *višine blokov pa bodo padale na vsako stran. Ker smemo izbrati le bloke z intervala dolgega 100, bomo seveda izbrali najvišje bloke okrog* μ, *torej interval od 50 do 150. Računamo*

$$\begin{aligned} &P(50 \leq S_n \leq 150) \\ &\quad= P(-50 \leq S_{1000} - 100 \leq 50) \\ &\quad= P(-\frac{50}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811} \leq \frac{S_{1000} - 100}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811} \leq \frac{50}{\sqrt{1000} \cdot 1,5811}) \\ &\quad\approx P(-1 \leq Z \leq 1) \\ &\quad= 0,68\,. \end{aligned}$$