

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

STATISTIKA

4. KOLOKVIJ

4. JUNIJ 2003

IME IN PRIIMEK: \_\_\_\_\_ VPISNA ŠT:

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, na razpolago pa imate 90 minut.

Naloga	a.	b.	c.	
1.			•	
2.				
3.			•	
4.			•	
Skupaj				

1. (25) Naj bosta  $X$  in  $Y$  neodvisni slučajni spremenljivki z  $X \sim \text{Bin}(m, p)$  in  $Y \sim \text{Bin}(n, p)$ . Označite  $Z = X + Y$ .

- a. (10) Določite rodovno funkcijo slučajne spremenljivke  $Z$ . Kako je porazdeljena  $Z$ ?
- b. (15) Izračunajte  $E(X|Z = z)$ .

2. (25) Porazdelitev slučajnih spremenljivk  $X$  in  $Y$  je dana z gostoto

$$f_{X,Y}(x, y) = cx^2y$$

za  $x, y \in [0, 1]$ .

- a. (5) Določite konstanto  $c$ .
- b. (10) Določite robni gostoti  $f_X(x)$  ter  $f_Y(y)$ .
- c. (10) Izračunajte še  $E(XY^2)$  ter  $\text{cov}(X, Y)$ .

3. (25) Naj bo  $m > 0$  celo število. Naj bo  $p \in (0, 1)$  in naj velja  $q = 1 - p$ . Za proces razvejanja  $Z_0, Z_1, \dots$  naj velja

$$G(s) = G_{Z_1}(s) = \left( \frac{1}{2 - s^m} \right)^{1/m}.$$

- a. (10) Izračunajte  $E(Z_2)$ .
- b. (15) Z matematično indukcijo pokažite, da je

$$G_n(s) = \left( \frac{n - (n-1)s^m}{n+1 - ns^m} \right)^{1/m}$$

in izračunajte  $P(Z_n = 0)$  za  $k = 0, 1, 2, \dots$

4. (25) Čarovnik ima dve škatli: prvo s povprečjem 1 in standardnim odklonom 10, drugo pa s povprečjem -1 in standardnim odklonom 10. Ponuja nam naslednjo igro na srečo: naskrivaj bo izbral eno izmed škatel, vsako z verjetnostjo 1/2. Nato bo iz izbrane škatle izbral  $n = 100$  listkov s ponavljanjem in nam povedal vsoto. Če prav uganemo, katero škatlo je izbral, dobimo nagrado. Odločimo se, da bomo uganjevali na naslednji način: če je vsota pozitivna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem 1, če pa bo vsota negativna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem -1.

- a. (10) Recimo, da čarovnik izbere škatlo s povprečjem 1, vendar vam tega ne pove. Kolikšna približno je verjetnost, da boste prav uganili na podlagi vsote števil na 100 naključno izbranih lističih.

*Namig: Računate  $P(S_{100} > 0)$ .*

- b. (15) Recimo spet, da je čarovnik izbral škatlo s povprečjem 1. Kolikokrat bi moral izbirati lističe in nam povedati vsoto, da bi uganili prav z verjetnostjo približno 0,99?