

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

STATISTIKA

4. KOLOKVIJ

3. JUNIJ 2004

IME IN PRIIMEK: \_\_\_\_\_

VPISNA ŠT: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, na razpolago pa imate 90 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.				•	
2.					
3.			•	•	
4.				•	
Skupaj					

**1.** (30) Naj bo  $Z_0, Z_1, \dots$  proces razvejanja z rodovno funkcijo

$$G_{Z_1}(s) = G(s) = \frac{1}{2}(1 + s^2).$$

Označite  $W_n = Z_0 + Z_1 + \dots + Z_n$ . Slučajna spremenljivka  $W_n$  je število vseh posameznikov, ki so živelji do vključno generacije  $n$ . Označite rodovno funkcijo spremenljivke  $W_n$  s  $H_n$ . Za rodovne funkcije  $H_0, H_1, H_2, \dots$  velja rekurzivna zveza

$$H_0(s) = s \quad \text{in} \quad H_{n+1}(s) = s G(H_n(s)).$$

- a. (10) Poiščite porazdelitev spremenljivke  $W_2$ .
- b. (10) Označite  $\mu_n = E(W_n)$ . Izpeljite rekurzivno formulo za  $\mu_n$  in pokažite, da je  $\mu_n = n + 1$ .
- c. (10) Naj bo  $W_\infty = Z_0 + Z_1 + \dots$  celotno število posameznikov, ki so kdajkoli živelji. Ker ta proces razvejanja izumre, bo  $W_\infty$  končna slučajna spremenljivka. Označite njeno rodovno funkcijo z  $H(s)$ . Ta bo ustrezala enačbi

$$H(s) = s G(H(s)).$$

Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke  $W_\infty$ .

*Namig: Iz zgornje enačbe izračunajte  $H(s)$  in upoštevajte, da je*

$$\sqrt{1-x} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k-1}{k-1} \frac{x^k}{(2k-1)2^{2k-1}}$$

za  $|x| < 1$ .

**2.** (35) Pri šifriranju sporočil so pomembni računalniški generatorji slučajnih števil. To so programi, ki generirajo naključna zaporedja ničel in enic, kot da bi izbirali z vračanjem iz škatle  $\boxed{0} \quad \boxed{1}$ . Za potrebe kontrole kvalitete je program generiral zaporedje 100.000 slučajnih ničel in enic.

- a. (10) Izračunajte približno verjetnost, da bo med temi 100.000 naključnimi števili 50.260 enic ali manj.
- b. (5) Kolikšna je verjetnost, da bo enic med 48.740 in 50.260?
- c. (10) Določite tak  $a$ , da bo verjetnost, da dobimo  $a$  enic ali manj, enaka 99%.
- d. (10) Privzemite, da je bilo med 100.000 računalniško generiranimi slučajnimi števili 50.608 enic. Bi verjeli, da je tak generator slučajnih števil "kvaliteten"? Izračunajte verjetnost, da dobimo 50.608 enic ali več in utemeljite odgovor.

**3.** (25) V vinski kleti stoji sod, ki drži 100 l (1000 dl). Ko ga do vrha napolnimo, ne opazimo, da pušča. V povprečju pa na dan "odkaplja" iz njega 0,1 dl vina, s standardnim odklonom 0,09 dl.

- a. (15) Ali je mogoče, da je po enem letu v sodu manj kot 95 l vina kljub temu, da soda tekom leta nismo odpirali?
- b. (10) Po kolikšnem času bomo lahko z več kot 50 % gotovostjo trdili, da je v sodu manj kot 90 l vina?

4. (30) V eni od zadnjih anket pred referendumom 23. marca 2003 se je za vstop Slovenije v zvezo NATO izreklo 58% volivcev, proti se je izreklo 25%, neopredeljenih pa je bilo 17%. Privzemite, da je bil izbran vzorec enostavni slučajni velikosti  $n = 900$ . Privzemite tudi, da si tisti, ki se v anketi izrečejo za ali proti, ne premislijo.

- a. (10) Na referendumu se je za vstop v zvezo NATO izreklo 66,4% volivcev. Razmišljajte, kot da bi bila udeležba dovolj visoka, da je 66,4% pravi odstotek za celotno populacijo volivcev. Lahko rezultat 58% na predvolilni anketi pripisemo samo naključnosti pri izbiri vzorca, ali je bolj smiselno trditi, da je za glasovalo tudi nekaj tistih, ki so se anketarjem izrekli kot neopredeljeni? Utemeljite vaš odgovor! Pomagajte si s standardno napako!
- b. (10) Kolikšna je približno verjetnost, da se vzorčni odstotek pri takšni anketi, kot smo jo opisali, od pravega odstotka razlikuje za 1% ali več?
- c. (10) Postavite se v čas pred referendumom. Ali bi pred referendumom napovedali, da bo rezultat referendumu gotovo za vstop v zvezo NATO? Zakaž? Utemeljite odgovor!