FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za matematiko

Statistika

4. kolokvij

9. junij 2006

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, na razpolago pa imate 90 minut.

Naloga	a.	b.	c.	d.	
1.			•	•	
2.			•	•	
3.			•	•	
4.			•	•	
Skupaj					

1. (25) Za celoštevilske slučajne spremenljivke $X_0, X_1, \ldots$ naj velja

$$P(X_{n+1} = k+1 | X_n = k) = P(X_{n+1} = k-1 | X_n = k) = \frac{1}{2}$$

za vse $k \in \mathbb{Z}$. Predpostavite, da je $P(X_0 = 0) = 1$.

a. (10) Izračunajte

$$E\left(|X_{n+1}| \big| X_n = k\right)$$

za $k \in \mathbb{Z}$.

Rešitev: Po formuli je

$$E(f(Y)|X = x) = \sum_y y P(Y = y|X = x)\,.$$

V našem primeru je $f(y) = |y|$. *Sledi*

$$E\left(|X_{n+1}| \big| X_n = k\right) = \begin{cases} |k| & \text{za } k \neq 0 \\ 1 & \text{za } k = 0 \end{cases}$$

b. (15) Pokažite, da velja

$$E\left(|X_n|\right) = P(X_{n-1} = 0) + P(X_{n-2} = 0) + \cdots + P(X_0 = 0)\,.$$

Rešitev: Računamo po formuli za popolno matematično upanje.

$$\begin{aligned} E\left(|X_n|\right) &= \sum_k E\left(|X_n| \big| X_{n-1} = k) P(X_{n-1} = k\right) \\ &= \sum_k |k| \cdot P(X_{n-1} = k) + P(X_{n-1} = 0) \\ &= E\left(|X_{n-1}|\right) + P(X_{n-1} = 0)\,. \end{aligned}$$

Formula, ki jo moramo dokazati, sledi po indukciji.

2. (25) Naj bodo X, Y in Z med sabo neodvisne slučajne spremenljivke z $X \sim \mathrm{Geom}(1/2)$, $Y \sim \mathrm{Geom}(1/3)$ in $Z \sim \mathrm{Geom}(1/4)$.

a. (10) Izračunajte rodovno funkcijo vsote $W = X + Y + Z$.

Rešitev: Vemo, da je za geometrijsko slučajno spremenljivko s parametrom p rodovna funkcija enaka

$$G(s) = \frac{ps}{1-qs},$$

kjer je $q = 1 - p$. Rodovna funkcija vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk je enaka produktu posameznih rodovnih funkcij, zato

$$\begin{aligned} G_W(s) &= G_X(s) \cdot G_Y(s) \cdot G_Z(s) \\ &= \frac{s/2}{1-s/2} \cdot \frac{s/3}{1-2s/3} \cdot \frac{s/4}{1-3s/4} \\ &= \frac{s^3}{(2-s)(3-2s)(4-3s)}. \end{aligned}$$

b. (15) Pokažite, da je

$$G_W(s) = \frac{s^3}{4(1-s/2)} - \frac{4s^3}{3(1-2s/3)} + \frac{9s^3}{8(1-3s/4)}$$

in dokažite, da je za $k = 0, 1, \ldots$

$$P(W = k+3) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{9}{8}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

Namig: Za $|x| < 1$ je

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Rešitev: Prvo trditev dokažmo tako, da damo ulomke na skupni imenovalec in preverimo enakost. Za drugi del upoštevamo, da za $|x| < 1$ velja

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Če razvijemo v vrsto posamezne člene dobimo

$$\begin{aligned} G_W(s) &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{s}{2}\right)^k s^3 - \frac{4}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2s}{3}\right)^k s^3 + \frac{9}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3s}{4}\right)^k s^3 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{9}{8}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^k\right) s^{k+3}\,. \end{aligned}$$

Verjetnost $P(W = k+3)$ *preberemo kot koeficient pri* s^{k+3}.

3. (25) Naj bo $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ proces razvejanja, za katerega velja

$$G(s) = G_{Z_1}(s) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}s^2 .$$

a. (15) Izračunajte verjetnost, da proces razvejanja izumre najkasneje v tretji generaciji. Bolj točno to pomeni, da iščemo verjetnost, da je že tretja generacija prazna.

Rešitev: Iskana verjetnost je $P(Z_3 = 0) = G_3(0)$. *Računamo po vrsti*

$$G_2(s) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot G(s)^2 = \frac{11}{27} + \frac{8}{27}\,s^2 + \frac{8}{27}\,s^4 .$$

Nadlajujemo

$$\begin{aligned} G_3(s) &= G_2(G(s)) \\ &= \frac{11}{27} + \frac{8}{27} \cdot G(s)^2 + \frac{8}{27} \cdot G(s)^4 \\ &= \frac{11}{27} + \frac{8}{27}\left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9}s^2 + \frac{4}{9}\right)^2 + \\ &+ \frac{8}{27}\left(\frac{1}{81} + \frac{8}{81}s^2 + \frac{24}{81}s^4 + \frac{32}{81}s^6 + \frac{16}{81}s^8\right) . \end{aligned}$$

Vstavimo $s = 0$ *in sledi*

$$G_3(0) = \frac{971}{2187} .$$

b. (10) Izračunajte

$$E\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{Z_n}\right) .$$

Namig: Upoštevajte, da je

$$E\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{Z_n}\right) = G_n\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{in} \quad G_n = G_{n-1} \circ G .$$

Rešitev: Opazimo, da je

$$E\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{Z_n}\right) = G_n\left(\frac{1}{2}\right) .$$

Vemo, da velja

$$G_n(s) = G_{n-1}(G(s)) \,,$$

torej je

$$G_n\left(\frac{1}{2}\right) = G_{n-1}\left(G\left(\frac{1}{2}\right)\right) \,.$$

Ker je $G(1/2) = 1/2$, *je*

$$G_n\left(\frac{1}{2}\right) = G_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right) \,.$$

Veljalo bo torej

$$E\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{Z_n}\right) = E\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{Z_0}\right) = \frac{1}{2} \,.$$

4. (25) Znani angleški statistik M. G. Kendall v svojem obsežnem članku *The Random Character of Stock Market Prices* pravi:

> ... dnevno zaporedje cen delnic zgleda "blodeče", kot da bi nek škrat vsak dan naključno izbral število iz velike škatle, ki ima povprečje 0 in nek standardni odklon, in to izbrano število prištel ceni delnice prejšnega dne.

Predpostavite, da je povprečje škatle res 0, standardni odklon pa 1. Razlika cene delnice na začetku leta in na koncu leta je tako enaka vsoti 365 naključno izbranih števil iz te škatle.

a. (15) Recimo, da je bila cena delnice na začetku leta enaka 150 (v ustreznih enotah). Kolikšna je približno verjetnost, da bo na koncu vredna 160 ali več?

Rešitev: Potrebno je izračunati verjetnost, da bo vsota 365 naključno izbranih števil iz škatle enaka 10 alii več. Z uporabo centralnega limitnega izreka računamo

$$\begin{aligned} P(S_{365} \geq 10) &= P\left(\frac{S_{365}}{\sqrt{365}} \geq \frac{10}{\sqrt{365}}\right) \\ &\approx P(Z \geq 0,52) \\ &= 0,30\,. \end{aligned}$$

b. (10) Nekdo vam ponuja naslednjo stavo: če bo cena delnice na koncu leta 110 ali več, ti plačam 20 enot, če ne pa ti meni plačaš 5 enot. Na začetku leta je vrednost delnice 100. Kaj menite o tej stavi?

Namig: Kolikšen je vaš pričakovan dobiček?

Rešitev: Najprej izračunamo verjetnost, da bo vrednost delnice na koncu leta 110 *ali več. Podobno kot v a. računamo*

$$\begin{aligned} P(S_{365} \geq 10) &= P\left(\frac{S_{365}}{\sqrt{365}} \geq \frac{10}{\sqrt{365}}\right) \\ &\approx P(Z \geq 0,52) \\ &= 0,30\,. \end{aligned}$$

Torej bo naše izplačilo z verjetnostjo $0,3$ *e nako* 20, *z verjetnostjo* $0,7$ *pa* -5. *Pričakovano izplačilo je* $2,5$. *Stavo s pozitivnim pričakovanim izplačilom seveda vedno sprejmemo.*