

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA MATEMATIKO, PRAKTIČNA MATEMATIKA
STATISTIKA
4. KOLOKVIJ
31. MAJ 2002

IME IN PRIIMEK: _____ VPISNA ŠT:

--	--	--	--	--	--	--	--

NAVODILA

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, na razpolago pa imate 90 minut.

Naloga	a.	b.	
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Svetovno prvenstvo v nogometu je pred vrati. Nogometno igrišče v Gwangjuju je široko 70 metrov. Predpostavimo, da je gol točkast objekt v sredini krajše stranice igrišča. Napadalec Z. se od gola nikoli ne oddalji za več kot 35 metrov. Predpostavljamo, da se v danem trenutku Z. z enako verjetnostjo nahaja v katerikoli točki območja, kjer se giblje. Naj bo slučajna spremenljivka X razdalja nogometaša Z. od gola v danem trenutku.

- a. (15) Določi gostoto slučajne spremenljivke X , matematično upanje X , ter verjetnost, da je v danem trenutku $X \leq 20$.

- b. (10) Občasno napadalec Z. strelja. Če je v trenutku strela oddaljen od gola za manj kot 20 metrov, potem je verjetnost, da doseže zadetek, enaka $\frac{7}{16}$, sicer pa $\frac{2}{11}$. Določi verjetnost, da Z. pri strelu v 21. minuti igre, doseže zadetek.

2. (25) Naj bodo X_1, X_2, \dots nenegativne celoštevilске slučajne spremenljivke, za katere velja zveza

$$X_{n+1} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{X_n} + Y_{n+1}.$$

Pri tem so Z_1, Z_2, \dots neodvisne od X_n in Y_n , enako porazdeljene, poleg tega pa sta X_n in Y_n neodvisni. Predpostavite, da so Z_k Bernoullijeve s parametrom p , torej $P(Z_k = 1) = p$ in $P(Z_k = 0) = q = 1 - p$.

a. (10) Pokažite, da velja

$$G_{X_{n+1}}(s) = G_{X_n}(q + ps) \cdot G_{Y_{n+1}}(s).$$

- b. (15) Predpostavite, da je $Y_k \sim \text{Po}(\lambda)$ za vsak $k \geq 1$, in naj bo $X_1 \sim \text{Po}(\lambda/q)$.
Kakšna je porazdelitev X_2 ?

3. (30) Naj bo dan proces razvejanja Z_0, Z_1, \dots z rodovno funkcijo

$$G(s) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{1-s}.$$

a. (10) Izračunajte verjetnost, da bo že 3. generacija brez predstavnikov.

b. (10) Z indukcijo pokažite, da je rodovna funkcija n -te generacije enaka

$$G_{Z_n}(s) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1+1/2+1/4+\dots+1/2^{n-1}} (1-s)^{2^{-n}}.$$

c. (10) Določite verjetnost, da rodbina izumre.

4. (25) Zdolgočaseni statistik je n -krat z vračanjem izbiral lističe iz spodnjih škatel. Števila na izbranih lističih je označil z X_1, X_2, \dots, X_n , njihovo vsoto pa z S_n .

(i) $\boxed{-1} \quad \boxed{0} \quad \boxed{1}$

(ii) $\boxed{-1} \quad \boxed{0} \quad \boxed{0} \quad \boxed{0} \quad \boxed{0} \quad \boxed{0} \quad \boxed{0} \quad \boxed{0} \quad \boxed{1}$

a. (15) Statistik je izračunal

$$P(-30 \leq S_{1000} \leq 30) \approx 0,96.$$

Za katero od škatel je računal verjetnosti? Utemeljite odgovor.

b. (10) Statistiki je izračunal $P(S_{100} = 0) \approx 0,049$. Katero škatlo je obravnaval?