

4. kolokvij iz statistike

Praktična matematika

16. maj 2007

1. (25) Kot znano upoštevajte, da je

$$\log(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

za $|x| < 1$.

- a. (10) Naj za slučajno spremenljivko X velja

$$P(X = k) = \frac{(1-p)^k}{k \log(1/p)}$$

za $k = 1, 2, \dots$ in $p \in (0, 1)$. Izračunajte rodovno funkcijo slučajne spremenljivke X .

- b. (15) Naj bodo X_1, X_2, \dots neodvisne spremenljivke z enako porazdelitvijo kot spremenljivka X iz a. Naj bo N od njih neodvisna slučajna spremenljivka s Poissonovo porazdelitvijo s parametrom $\lambda = -m \log p$ za neko celo število $m \geq 1$. Naj bo

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_N.$$

Izračunajte $P(Y = k)$ za $k = 0, 1, 2, \dots$. Kot znano upoštevajte Newtonovo formulo

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

za $|x| < 1$.

2. (25) Naj bo Z_0, Z_1, \dots proces razvejanja. Slučajno število Y potomcev vsakega posameznika naj ima porazdelitev

$$P(Y = k) = 2^{-(k+1)}$$

za $k = 0, 1, \dots$

- a. (10) Z matematično indukcijo pokažite, da je rodovna funkcija $G_n(s)$ spremenljivke Z_n enaka

$$G_n(s) = \frac{n - (n-1)s}{n+1 - ns}.$$

- b. (15) Izračunajte $E(Y)$ in $P(Z_n = 0)$ in izračunajte $P(\text{proces izumre})$. Kako se to ujema s teorijo?

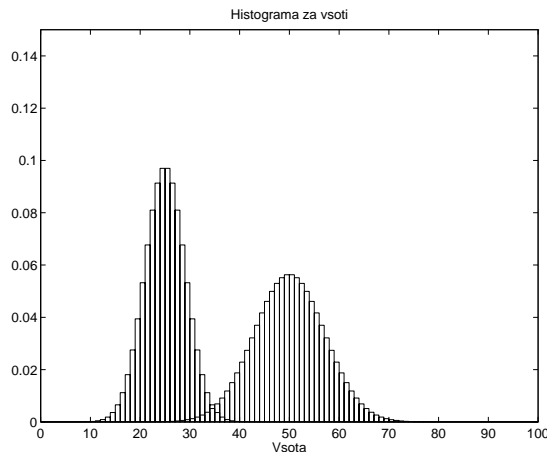
3. (25) Na sliki 1 sta histograma za porazdelitvi vsot 25 neodvisnih izbiranj iz ene od naslednjih dveh škatel:

(i)

0	1	2
---	---	---

(ii)

0	1	2	3	4
---	---	---	---	---



Sl. 1 Histograma za vsote neodvisnih izbiranj iz škatel (i) ali (ii).

- a. (15) Kateri od zgornjih dveh histogramov pripada škatli (i) in kateri škatli (ii)? Utemeljite odgovor.
- b. (10) Izračunajte približno verjetnost, da bo vsota 25 izbiranj iz škatle (ii) večja ali enaka 40.

4. (25) Dva strastna igralca na srečo igrata ruleto v neskončnost. Ruletni cilinder ima 37 izsekov, od katerih je 18 rdečih, 18 črnih in 1 zelen. Prvi igralec vedno stavi 1€ na rdeče, drugi pa vedno stavi 1€ na številko 17, ki je črna. Čisti dobiček po eni igri je v primeru zmage za prvega 1€, za drugega pa 35€, v nasprotnem primeru pa oba izgubita stavo v višini 1€.

- a. (10) Ocenite verjetnost, da drugi igralec po 2000 igrah nima izgube.
- b. (15) Označite z X_n čisti profit prvega igralca po n igrah, z Y_n pa profit drugega igralca po n igrah. Izračunajte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n > X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n - X_n > 0).$$

Utemeljite vaš razmislek.

Namigi: Napišite $Y_n - X_n = \sum_{k=1}^n (U_k - V_k)$, kjer je V_k čisti profit prvega igralca v k -ti igri in U_k čisti profit drugega igralca v isti igri. Slučajne spremenljivke $U_k - V_k$ so med sabo neodvisne z enako porazdelitvijo in $\text{var}(U_k - V_k) = 1368/37$.