

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ODDELEK ZA MATEMATIKO

VERJETNOST 2010/2011- PRAKTIČNA MATEMATIKA

1. KOLOKVIJ

7. DECEMBER 2010

- 1.** Na polici je deset različnih knjig, štiri matematične in šest romanov. Na koliko načinov so lahko razporejene, če

- (a) morajo biti matematične knjige skupaj?
- (b) morajo biti romani skupaj?
- (c) morajo biti matematične knjige skupaj ter romani tudi skupaj?

Na koliko načinov lahko Alenka izmed teh knjig izbere eno matematično in dva romana?

- 2.** Igralec premeša standardni snopič 52 kart ter izvleče tri karte.

- (a) Kolikšna je verjetnost, da nima nobene desetke?
- (b) Kolikšna je verjetnost, da ima vsaj enega asa?
- (c) Kolikšna je verjetnost, da ima vse karte iste barve (to pomeni, recimo, same križe)?

- 3.** Gusar na enem izmed desetih otokov skrije zaklad (na vsakem enako verjetno). Raziskovalna ekipa, ki išče zaklad, pregleda šest otokov (slučajno izbranih). Za vsak otok velja: če na njem ni zaklada, ga ekipa seveda ne odkrije. Če pa zaklad na otoku je, ga odkrijejo z verjetnostjo 80 %.

- (a) Kolikšna je verjetnost, da ekipa pregleda tudi otok, na katerem je zaklad?
- (b) Kolikšna je verjetnost, da ekipa najde zaklad?
- (c) Recimo, da ekipa zaklada ni odkrila. Kolikšna je pogojna verjetnost, da se skriva na enem izmed pregledanih otokov?

- 4.** Mečemo poštano kocko. Definiramo slučajno spremenljivko X kot število metov do trenutka, ko pade šestič 1. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X ?

(Primer: če so meti zaporedoma 6, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 5, 2, 3, 3, 1, 4, 5, 1, 1, 2, 6, 1, je $X = 19$.)

Definirajmo še slučajno spremenljivko Y . Mečemo kocko toliko časa, da pade 1. Nato jo mečemo toliko časa, da pade 2 (ne gledamo metov pred prvo enko), nato mečemo, dokler ne pade 3, za tem čakamo na 4, na 5, in na koncu še na 6. Z Y označimo število metov. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka Y ?

(Primer: če so meti zaporedoma 6, 6, 1, 5, 2, 3, 6, 2, 2, 6, 3, 4, 4, 6, 5, 4, 2, 1, 2, 6, je $Y = 20$.)

2. KOLOKVIJ

28. JANUAR 2011

- 1.** Igralec premeša standardni snopič 52 kart (med njimi je 13 pikov) ter izvleče tri karte. Naj X označuje število pikov med izvlečenimi kartami.

- (a) Kolikšna je verjetnost $P(X = 0)$?
- (b) Kolikšna je verjetnost $P(X = 1)$?
- (c) Koliko je $E(X)$?

2. Naj imata slučajni spremenljivki X in Y skupno gostoto

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c \cdot x, & 0 < x < y < 2 \\ 0, & \text{sicer} \end{cases} .$$

Izračunajte konstanto c . Določite robni gostoti $p_X(x)$ in $p_Y(y)$. Določite gostoto slučajne spremenljivke $Z = Y - X$.

3. X in Y sta slučajni spremenljivki s porazdelitvijo

$X \setminus Y$	-2	0	10
-3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
5	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{16}$
9	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$

Izračunajte koreacijski koeficient $r(X, Y)$.

4. Naj bo X slučajna spremenljivka z gostoto $p_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$. Določite kvantil, ki ustreza verjetnosti $\frac{2}{5}$. Koliko je $P(X \leq \frac{2}{5})$? Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Y = e^{-X}$?

IZPIT

1. FEBRUAR 2011

1. V skupini je 8 otrok. Vsak izmed njih je z verjetnostjo $\frac{1}{8}$ okužen z virusom gripe, neodvisno od ostalih.

Določite verjetnost, da je natanko eden izmed otrok okužen z virusom.

Za zdravniški pregled slučajno izberejo dva otroka (izmed zgornjih osmih), za katera se izkaže, da sta zdrava. Kolikšna je pogojna verjetnost, da so vsi otroci v skupini zdravi?

2. V enostavnih igri Spomin so trije pari ploščic z enakimi slikami. Ploščice premešamo in postavimo z licem navzdol na podlago. Vsak igralec odpre dve ploščici (eno za drugo), in če tvorita par, ju pobere. Dva igralca ploščice odpirata izmenično, neodvisno od tega, če odkrijeta par ali ne.

- (a) Kolikšna je verjetnost, da prvi igralec v prvem obratu najde par?
 - (b) Recimo, da je prvi igralec v prvem obratu odkril par. Kolikšna je pogojna verjetnost, da drugi igralec v svojem prvem obratu odkrije par?
 - (c) Recimo, da prvi igralec v prvem obratu ni odkril para. Kolikšna je pogojna verjetnost, da drugi igralec v svojem prvem obratu odkrije par (igralec seveda ne odpira ploščic slučajno, temveč optimalno upošteva informacijo, ki jo ima)?
 - (d) Kolikšna je verjetnost, da drugi igralec v svojem prvem obratu najde par?
3. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, porazdeljeni zvezno enakomerno na intervalu $[0, 1]$. Definiramo novi slučajni spremenljivki $U = \min(X, Y)$ in $V = \max(X, Y)$. Določite gostoto slučajne spremenljivke U . Izračunajte $E(U)$. Določite tudi gostoto slučajne spremenljivke V , nato izračunajte $E(V)$. Določite skupno gostoto slučajnih spremenljivk U in V .

4. X in Y sta slučajni spremenljivki s porazdelitvijo

$X \setminus Y$	-3	0	9
-3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{16}$
4	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
10	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$

- (a) Izračunajte $E(X|Y = -3)$, $E(X|Y = 0)$, $E(X|Y = 9)$ in $E(X)$.
(b) Zapišite porazdelitev pogojnega matematičnega upanja $E(X|Y)$. Izračunajte $E(E(X|Y))$.

IZPIT
18. MAJ 2011

1. Imamo 3 množice cifer: $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B := \{3, 5, 7\}$ in $C := \{0, 3, 9\}$.

- a. Koliko je vseh različnih osem mestnih števil, sestavljenih iz cifer množic A in B ? Vsaka cifra se lahko ponovi natanko tolkokrat, v kolikor množicah je vsebovana.
 - b. Koliko je vseh različnih enajst mestnih števil, sestavljenih iz cifer množic A , B in C ? Pri tem se neka cifra lahko ponovi natanko tolkokrat, v kolikor množicah je vsebovana.
 - *c. Koliko je vseh različnih trimestnih števil, sestavljenih iz cifer množic A in B ? Pri tem se neka cifra lahko ponovi natanko tolkokrat, v kolikor množicah je vsebovana.
2. V posodi so tri kroglice, dve beli in ena črna. Najprej slučajno izberemo eno in jo odstranimo iz posode. Nato slučajno izberemo eno izmed preostalih dveh kroglic in jo pogledamo ter nato vrnemo. To ponovimo še dvakrat. Kolikšna je verjetnost, da v drugem delu poskusa vidimo vedno belo kroglico?
- Recimo, da smo v drugem delu vedno videli belo kroglico. Kolikšna je pogojna verjetnost, da smo na začetku odstranili iz posode črno kroglico?
3. Naj bo X slučajna spremenljivka z gostoto $p_X(x) = \begin{cases} c \cdot x(9-x), & 0 < x < 6 \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$. Določite vrednost konstante c . Določite kvantil, ki ustreza verjetnosti $\frac{7}{20}$. Izračunajte $E(X/(9-X))$.
4. X in Y sta slučajni spremenljivki s porazdelitvijo

$X \setminus Y$	0	1	2
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$

Izračunajte $E(X|Y = 0)$, $E(X|Y = 1)$, $E(X|Y = 2)$, $E(X)$ in $K(X, Y)$.

IZPIT
24. AVGUST 2011

- Igralec premeša standardni snopič 52 kart (torej je od teh 26 rdečih in 26 črnih) ter izvleče štiri karte. Kolikšna je verjetnost, da nima nobene črne karte? Kolikšna je verjetnost, da ima vsaj eno rdečo karto? Kolikšna je verjetnost, da ima vsaj eno rdečo in vsaj eno črno karto?
- V posodi so štiri kroglice, tri bele in ena črna. Najprej slučajno izberemo eno in jo odstranimo iz posode. Nato slučajno izberemo eno izmed preostalih treh kroglic in jo pogledamo ter nato vrnemo. To ponovimo še dvakrat. Kolikšna je verjetnost, da v drugem delu poskusa vidimo vedno belo kroglico?

Recimo, da smo v drugem delu vedno videli belo kroglico. Kolikšna je pogojna verjetnost, da smo na začetku odstranili iz posode črno kroglico?

- Naj bo X slučajna spremenljivka z gostoto $p_X(x) = \begin{cases} ce^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$. Določite vrednost konstante c . Določite kvantil, ki ustreza verjetnosti $\frac{1}{2}$, izračunajte mediano ter $E(X)$ in $E(X^2)$.
- X in Y sta slučajni spremenljivki s porazdelitvijo

$X \setminus Y$	0	1	2
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$

Izračunajte $E(Y|X = 1)$, $E(Y|X = 2)$, $E(Y|X = 3)$, $E(Y|X = 4)$, $E(Y)$ in $K(X, Y)$.