1. Osnovni pojmi

Enačba, v kateri poleg neznane funkcije neodvisnih spremenljivk ter konstant nastopajo tudi njeni odvodi, se imenuje *diferencialna enačba*.

Primer 1.1:

Diferencialne enačbe so izrazi:

$$y''' + ay' + by^2 = \sin x$$

$$x^2 y'' + a \sin y' = x^{-\alpha}$$

$$x^a dy + y \sin x \, dx = xy^2 \; .$$

□□□

Diferencialna enačba se imenuje *navadna*, če je neznana funkcija odvisna le od ene spremenljivke in *parcialna*, če je neznana funkcija odvisna od več neodvisnih spremenljivk.

Primer 1.2:

Enačba

$$y''' + ay' + by^2 = \sin x$$

je navadna diferencialna enačba. Enačba

$$2y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

je parcialna diferencialna enačba.

□□□

Stopnja najvišjega odvoda neznane funkcije v diferencialni enačbi določa *red* diferencialne enačbe.

Primer 1.3:

Enačba

$$x^2 y' + 2y^3 = e^x \cos x$$

je navadna diferencialna enačba prvega reda. Enačba

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = a \frac{\partial T}{\partial t}$$

je parcialna diferencialna enačba drugega reda.

□□□

Diferencialna enačba je *linearna*, če nastopajo iskana funkcija in njeni odvodi le v prvi potenci. V nasprotnem primeru je diferencialna enačba *nelinearna*.

Primer 1.4:

Diferencialna enačba

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - a^2\right) y = \sin x$$

je navadna linearna diferencialna enačba drugega reda. Enačba

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = ax^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

je navadna nelinearna diferencialna enačba drugega reda.

□□□

1.1 Rešitve diferencialne enačbe

Splošno diferencialno enačba reda n zapišemo v obliki:

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0.$$

Vsaka funkcija $y = y(x)$, ki zadošča dani diferencialni enačbi, je _rešitev_ te diferencialne enačbe. Da se pokazati, da ima najsplošnejša rešitev dane diferencialne enačbe reda n obliko:

$$\varphi\left(x, y, C_1, C_2, ..., C_n\right) = 0,$$

kar pomeni, da rešitev vsebuje n _poljubnih_ konstant $C_1, C_2, ..., C_n$. Taka rešitev se imenuje _splošna_ _rešitev_ ali _splošni_ _integral_ diferencialne enačbe. Če te konstante na osnovi nekih posebnih pogojev lahko določimo, dobimo _posebno_ ali _partikularno rešitev_ diferencialne enačbe (včasih lahko rečemo tudi _partikularni integral_ diferencialne enačbe). Seveda je partikularnih rešitev pravzaprav neskončno mnogo, po ena za vsak nabor vrednosti konstant $C_1, C_2, ..., C_n$.

Primer 1.5:

Splošna rešitev diferencialne enačbe prvega reda

$$y' - y = 0$$

je funkcija

$$y = Ce^x .$$

Če na osnovi nekih dodatnih pogojev ugotovimo, da je konstanta $C = 2$, dobimo partikularno rešitev

$$y = 2e^x .$$

□□□

Primer 1.6:

Splošna rešitev diferencialne enačbe drugega reda

$$y'' - a^2 y = 0$$

je funkcija:

$$y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}$$

ali pa funkcija:

$$y = c_1 \,\mathrm{sh}\, ax + c_2 \,\mathrm{ch}\, ax .$$

Nekatere možne partikularne rešitve pa so:

za $c_1 = -1,\ c_2 = 0:$ $\quad y = -\mathrm{sh}\, ax,$

za $C_1 = 5,\ C_2 = -2:$ $\quad y = 5e^{ax} - 2e^{-ax},$

za $c_1 = 1,\ c_2 = \lambda:$ $\quad y = \mathrm{sh}\, ax - \lambda \,\mathrm{ch}\, ax .$

□□□

V nekaterih primerih pa obstaja za diferencialno enačbo tudi rešitev, ki jo ne moremo dobiti iz splošne rešitve. Taka rešitev se imenuje *singularna rešitev.*

1. 2 Metode reševanja diferencialnih enačb

Postopek reševanja diferencialne enačbe imenujemo *integracija diferencialne enačbe*. Integrirati diferencialno enačbo pomeni torej:

- določiti njeno splošno rešitev in/ali
- določiti njeno partikularno rešitev.

Če nam uspe rešiti diferencialno enačbo s kombinacijo elementarnih funkcij in/ali integralov elementarnih funkcij, pravimo, da smo dobili rešitev dane enačbe v <u>*zaključeni obliki*</u> (ali v <u>*kvadraturah*</u>).

Primer 1.7:

Enačba prvega reda

$$xy' - y = x^3$$

ima rešitev

$$y = Cx + \frac{x^3}{2}.$$

Rešitev enačbe drugega reda

$$x^2 y'' + xy' + ax^2 y = 0$$

pa se ne da izraziti kot kombinacija elementarnih funkcij.

□□□

Nabor diferencialnih enačb, katerih rešitev se da dobiti v zaključeni obliki, je omejen. V splošnem obstajata dve skupini metod reševanja diferencialnih enačb:

- <u>*analitične metode*</u>:
  - posebne metode integracije,
  - splošne metode integracije,
    - integracija s pomočjo vrst,
    - integralske transformacije,
    - metoda zaporednih približkov,
    - druge metode;

- <u>*numerične metode*</u> - s temi metodami dobimo lahko le približno partikularno rešitev enačbe:

- metode numerične integracije,
- metoda končnih diferenc,
- interpolacijske metode,
- druge metode.

1.3 Začetne in robne vrednosti

Pri praktičnih problemih, ki jih opisujemo z diferencialnimi enačbami, nas običajno splošna rešitev sploh ne zanima - želimo dobiti le neko partikularno rešitev. Pri partikularni rešitvi moramo poznati vrednosti integracijskih konstant, ki jih bomo dobili tako, da bomo v problemu postavili nekatere *dodatne pogoje*. Ti pogoji nam bodo omogočili izračun natanko določenih vrednosti integracijskih konstant.

Opomba: Če v konkretnem praktičnem problemu pogoje spremenimo, dobimo iz novih pogojev drugačne vrednosti konstant in s tem neko drugo partikularno rešitev.

Pri *diferencialnih enačbah prvega reda* za določitev partikularne rešitve zadošča en sam pogoj, pri *diferencialnih enačbah drugega reda (ali celo višjih redov)* pa imamo *več možnosti.*

Glede na obliko pogojev ločimo:

- *problem začetnih vrednost* - za diferencialne enačbe prvega reda je v tem primeru v točki $x = x_0$ predpisana vrednost funkcije:

  $$y(x_0) = y_0;$$

  za diferencialno enačbo drugega reda pa sta v tem primeru v točki $x = x_0$ predpisana vrednost funkcije in njen odvod:

  $$y(x_0) = A, \quad y'(x_0) = B.$$

- *problem robnih vrednosti* - za diferencialno enačbo drugega reda mora partikularna rešitev zadoščati pogojema, ki sta podana v dveh točkah $x = x_1$ in $x = x_2$. Taki pogoji so npr.:

$$y(x_1) = A, \quad y(x_2) = B,$$

ali pa

$$ay(x_1) + by'(x_1) = A, \quad cy(x_2) + dy'(x_2) = B \ .$$

- *problem lastnih vrednosti* - je robni problem, ki vsebuje parametre, neodvisne od *x* in *y*. Primer take naloge je npr. določiti skalar λ iz diferencialne enačbe

$$y'' + \lambda^2 y = 0$$

pri danih robnih pogojih

$$y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 .$$

Za razliko od problema začetnih vrednosti, ko v vsakem primeru dobimo eno samo rešitev, ima naloga ob robnih problemih lahko eno, pa tudi neskončno ali nobene partikularne rešitve.

Primer 1.7:

Enačba prvega reda

$$y'' + y = 0$$

ima rešitev

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

Rešitev robnega problema $y(0) = y(\pi) = 0$ je funkcija

$$y = C_2 \sin x .$$

Ker je C_2 poljubna konstanta je rešitev neskončno mnogo.

□□□

1.4 Naloge

Za vsako od naslednjih diferencialnih enačb določi, ali je enačba navadna ali parcialna, ali je linerana ali nelinearna ter določi njen red!

1. $y'' + a(y')^2 - x^3 y = \cos x$;

   Rešitev: navadna, nelinearna, drugega reda.

2. $(\sin x - \cos y)dy + \sqrt[3]{x - y}\, dx = 0$;

   Rešitev: navadna, nelinearna, prvega reda.

3. $\dfrac{d^3 y}{dx^3} + x\dfrac{d^2 y}{dx^2} + \sin x\, y = 0$;

   Rešitev: navadna, linearna, tretjega reda.

4. $\dfrac{\partial z}{\partial x} + z\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy$;

   Rešitev: parcialna, linearna, prvega reda.

5. $y''' - y\,y' = x \ln x$;

   Rešitev: navadna, nelinearna, tretjega reda.

6. $y'' + xy' = \cos y'''$;

   Rešitev: navadna, nelinearna, tretjega reda.

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a\dfrac{\partial u}{\partial t}$;

Rešitev: parcialna, linearna, drugega reda.

8. $\sqrt{w^{(5)} + w} = \sin x$;

Rešitev: navadna, linearna, petega reda.

9. $\left(\dfrac{d^4 y}{dx^4}\right)^2 + 5x = \sin y$;

Rešitev: navadna, nelinearna, četrtega reda.

V nalogah od 10 do 15 preveri trditev, zapisano ob diferencialni enačbi!

NAVODILO: V vsaki nalogi izračunaj odvod $y' = \dfrac{dy}{dx}$ in/ali drugi odvod $y'' = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$ itd.. ter te izraze vstavi v ustrezno enačbo. Trditev bo pravilna, ko bo leva stran enačbe identično enaka desni strani.

10. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} - \dfrac{2}{x}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x^2} = 0$ ima rešitev $y = C_1 x + C_2 x^2$;

11. $xy\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$ ima rešitev $y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}$;

12. $(x+y)dx + x\,dy = 0$ ima rešitev $x^2 + 2xy = C$;

13. $x\dfrac{dy}{dx} - y + x\sqrt{x^2 - y^2} = 0$ ima rešitev: $\arcsin\dfrac{y}{x} = C - x$;

14. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} - \dfrac{2}{x}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x^2} = 0$ ima rešitev $y = C_1 x + C_2 x^2$;

15. $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$ ima rešitev $z=\frac{y}{f\left(x^2-y^2\right)}$.