2. Diferencialne enačbe prvega reda

2.1 Enačbe z ločljivima spremenljivkama

Diferencialno enačbo, ki jo lahko prevedemo na obliko

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)\,; \quad g(y) \neq 0\,,$$

se imenuje diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama. Desna stran je produkt dveh funkcij, od katerih je ena odvisna le od x in ena samo od y.

OPOMBA: Diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama v konkretnih primerih lahko dobimo zapisano tudi kako drugače; pomembno je le, da moremo *spremenljivki ločiti*. To pomeni, da uspemo diferencial ter vse funkcijske povezave vsake spremenljivke posebej zapisati na svojo stran enačbe.

Enačbo rešujemo tako, da jo najprej prepišemo v obliko (ločimo spremenljivki):

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

in obe strani integriramo:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx\,.$$

Na ta način dobimo splošno rešitev:

$$G(y) = F(x) + C\,.$$

Pri tem smo obe konstanti, ki ju dobimo pri enem ter drugem integralu, združili v eno samo.

Če je podan začetni pogoj $y(x_0) = y_0$, lahko iz gornje splošne rešitve dobimo partikularno rešitev tako, da izračunamo vrednost konstante C.

Z upoštevanjem začetnega pogoja dobimo:

$$G(y_0) = F(x_0) + C,$$

od koder sledi vrednost konstante:

$$C = F(x_0) - G(y_0)$$

in s tem rešitev enačbe:

$$G(y) = F(x) + G(y_0) - F(x_0)$$

oziroma

$$G(x) - G(y_0) = F(x) - F(x_0).$$

OPOMBA: Gornji izraz nam pove, da lahko dobimo rešitev enačbe z ločljivima spremenljivkama v primeru, ko je podana začetna vrednost $y(x_0) = y_0$, z določeno integracijo obeh strani enačbe:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{x_0}^{x} f(\xi) d\xi.$$

Primer 2.1:

Rešimo diferencialno enačbo $y' = 2xy$!

REŠITEV:

Ko namesto odvoda upoštevamo $y' = \frac{dy}{dx}$, lahko spremenljivki ločimo, torej enačbo zapišemo v obliki:

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

in jo integriramo:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx .$$

Od tod sledi:

$$\ln|y| = x^2 + C$$

in:

$$|y| = e^{x^2+C} = e^C e^{x^2} \Rightarrow y = \pm e^C e^{x^2} .$$

Ker pa je $\pm e^C$ tudi poljubna konstanta, lahko zapišemo rešitev v obliki:

$$y = Ce^{x^2} .$$

Če se hočemo izogniti spremembi oznak, lahko integral enačbe zapišemo v obliki:

$$\ln|y| = x^2 + \ln C \Rightarrow |y| = Ce^{x^2} \Rightarrow y = Ce^{x^2} ,$$

ker sta predznaka + in - vključena v konstanto *C*.

□□□

V nadaljevanju si oglejmo dva konkretna primera uporabe diferencialnih enačb.

Primer 2.2 (ekološki model) :

V ekologiji je temeljno proučevanje namenjeno evoluciji populacije. Označimo:

$x(t)$ - število pripadnikov populacije v trenutku *t*,
$A(x)$ - število pripadnikov, ki se rodijo v časovni enoti,
$B(x)$ - število pripadnikov, ki v časovni enoti umrejo.

Vprašanje se glasi: *kolikšna je populacija v trenutku t* ?
REŠITEV:

Hitrost spremembe populacije je očitno enaka:

$$\frac{dx}{dt} = A(x) - B(x) .$$

Predpostavimo, da sta hitrost rojstev in umiranja dani z zakonoma

$$A(x) = ax$$
$$B(x) = bx^2 , \quad (a > 0,\ b > 0)$$

pa je diferencialna enačba ekološkega modela:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 .$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja $x(t_0) = x_0$ dobimo rešitev:

$$x = \frac{\lambda x_0}{x_0 + (\lambda - x_0)e^{-a(t-t_0)}} \quad , \quad \lambda = \frac{a}{b} .$$

Iz gornje enačbe sledi še:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lambda .$$

Pri tem sta možna dva primera: $\lambda > x_0$ in $\lambda < x_0$. V prvem primeru se populacija povečuje, v drugem pa zmanjšuje.

□□□

Primer 2.3 (iztekanje tekočine iz soda):

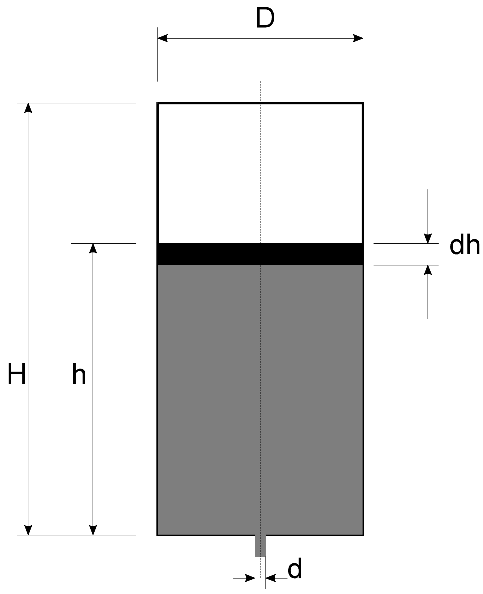
Vzemimo sod z višino *h* in presekom *S.* Presek soda se z višino spreminja, torej velja $S = S(h)$. Sod naj bo napolnjen s tekočino do višine *H.* Na dnu soda je majhna odprtina ploščine *A,* skozi katero tekočina odteka po zakonu:

$$v = \mu\sqrt{2gh} \ ,$$

kjer je μ empirični faktor upora odprtine, g pa težnostni pospešek.

V kolikšnem času t se nivo tekočine v sodu zniža od višine H do poljubne višine h ?

REŠITEV:



Slika 1

Naj bo v trenutku t višina tekočine h. V času dt se gladina tekočine v sodu zmanjša za dh. Sprememba prostornine tekočine v sodu je enaka prostornini tekočine, ki je v tem času iztekla:

$$-S(h)dh = Av(h)dt\ .$$

Predznak “minus“ smo vzeli zato, ker se gladina tekočine zmanjšuje. Gornjo enačbo prepišemo v obliko:

$$dt = -\frac{1}{A\mu\sqrt{2g}}\frac{S(h)}{\sqrt{h}}dh$$

in po integriranju dobimo:

$$t = -\frac{1}{A\mu\sqrt{2g}}\int_H^h \frac{S(h)}{\sqrt{h}}dh = \frac{1}{A\mu\sqrt{2g}}\int_h^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}}dh\ .$$

Pri popolnem izpraznenju soda je $h = 0$. Čas praznjenja soda je zato enak:

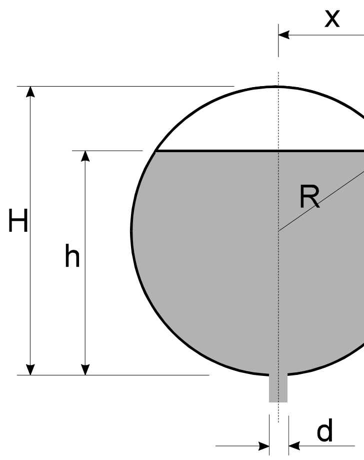
$$T = \frac{1}{A\mu\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}}dh\ .$$

Dva posebna primera:

1. Sod je valjasta posoda premera D in iztočne odprtine premera d (Slika 1) . V tem primeru je $S = \frac{\pi D^2}{4}$ in $A = \frac{\pi d^2}{4}$, zato je čas praznenja takšnega soda:

$$T = \frac{D^2}{d^2\mu\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{2D^2\sqrt{H}}{d^2\mu\sqrt{2g}}.$$

2. V primeru cisterne (slika 2) premera $D = 2R$ in dolžine L je površina gladine podana s formulo:



Slika 2

$$S(h) = 2xL = 2L\sqrt{R^2 - (h-R)^2}$$

oziroma

$$S(h) = 2L\sqrt{(D-h)h}\,.$$

V tem primeru je zato čas praznjenja:

$$T = \frac{2L}{A\mu\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{\sqrt{h(D-h)}}{\sqrt{h}}\,dh = \frac{8LD\sqrt{D}}{3\pi d^2\sqrt{2g}}\ .$$

□□□

2.2 Homogena diferencialna enačba

Homogena diferencialna enačba ima obliko:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0\,.$$

To enačbo bomo z ustrezno substitucijo prevedli na enačbo z ločljivima spremenljivkama. Vpeljimo torej novo funkcijo $u = u(x)$:

$$u = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; y = x\,u\,.$$

Ker je od tod:

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx},$$

se prvotna enačba glasi:

$$x\frac{du}{dx} + u = f(u).$$

Na ta način smo dobili enačbo z ločljivima spremenljivkama, ki jo, ko je $f(u) - u \neq 0$ in $x \neq 0$, zapišemo v obliki

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Po integraciji dobimo:

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln x - \ln C.$$

Pri tem smo pred integacijsko konstanto zgolj zaradi lepšega zapisa postavili negativen predznak. Če označimo:

$$F(u) = \int \frac{du}{f(u) - u},$$

dobimo:

$$F(u) = \ln x - \ln C \Rightarrow x = Ce^{F(u)}.$$

Končno rešitev enačbe pa dobimo, ko v gornji rešitvi nadomestimo neznano funkcijo *u* s prvotno neznano funkcijo *y*:

$$x = Ce^{F\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

V <u>*posebnem primeru*</u>, ko je $f(u) = u$, preide diferencialna enačba v obliko $\frac{du}{dx} = 0$. Rešitev te enačbe pa je $u = C$ in zato $y = Cx$.

□□□

Primer 2.4:

Poiščimo rešitev enačbe $(y-x)y\,dx + x^2\,dy = 0$!

REŠITEV:

Uvedemo novo spremenljivko $y = ux$. Potem je $dy = x\,du + u\,dx$ in prvotna enačba preide v obliko:

$$x^2(u-1)u\,dx + x^2(x\,du + u\,dx) = 0\,,$$

oziroma po ureditvi:

$$u^2\,dx + x\,du = 0\,.$$

Ko ločimo spremenljivki, dobimo:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{z^2} = 0\,,$$

od tod pa:

$$\ln x - \frac{1}{z} = C\,.$$

Ko še zamenjamo u s prvotno funkcijo *y,* dobimo končni rezultat naloge:

$$\ln x - \frac{x}{y} = C\,.$$

□□□