# 3. Diferencialne enačbe drugega in višjega reda

## 3.1 Nepopolne diferencialne enačbe drugega reda

**3.1.1** Najpreprostejša diferencialna enačba drugega reda ima obliko:

$$\mathbf{y'' = f(x)}\,.$$

Takšno enačbo rešimo z dvakratno integracijo. Po prvi integraciji dobimo:

$$y' = \int f(x)\,dx + C_1 = F(x) + C_1,$$

po drugi pa:

$$y = \int F(x)\,dx + C_1 x + C_2\,.$$

**Primer 3.1:**

Rešimo diferencialno enačbo $y'' = \sin x$ !

REŠITEV:

Dano enačbo integriramo in dobimo

$$y' = -\cos x + C_1\,.$$

Če zgornjo enačbo ponovno integriramo, dobimo končno rešitev

$$y = -\sin x + C_1 x + C_2\,.$$

□□□

**3.1.2** Vzemimo sedaj diferencialno enačbo drugega reda:

$$\mathbf{F(x, y', y'') = 0},$$

v kateri ne nastopa neznana funkcija $y$. Označimo $y' = p(x)$, pa dobimo enačbo prvega reda:

$$F(x, p, p') = 0.$$

Predpostavimo, da se ta enačba da rešiti in da je njena splošna rešitev

$$p = f(x, C_1).$$

Splošno rešitev prvotne enačbe potem dobimo z integracijo enačbe:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, C_1),$$

od koder sledi:

$$y = \int f(x, C_1)\,dx + C_2 \;.$$

**Primer 3.2:**

Rešimo diferencialno enačbo $y'' + \dfrac{y'}{x} = x$ !

REŠITEV:

Postavimo $y' = p$. Ker je zato $y'' = p'$, dobi dana enačba obliko linerane diferencialne enačbe 1. reda

$$p' + \frac{u}{x} = x,$$

ki ima rešitev

$$p = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}.$$

Na ta način je

$$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x},$$

zato je splošna rešitev dane enačbe

$$y = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2,$$

□□□

**3.1.3** Podobno ravnamo, ko enačba ne vsebuje neodvisne spremenljivke *x*, torej ko ima obliko:

$$\mathbf{F(y, y', y'') = 0}.$$

Označimo sedaj:

$$y' = u(y).$$

Ker je drugi odvod:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy},$$

preide prvotna enačba v diferencialno enačbo prvega reda oblike:

$$F\left(y, u, u\frac{du}{dy}\right) = 0.$$

Če jo uspemo integrirati in zapisati njeno splošno rešitev v obliki:

$$u = f\left(y, C_1\right),$$

dobimo splošno rešitev prvotne enačbe z integracijo enačbe:

$$\frac{dy}{dx} = f(y, C_1).$$

Ta diferencialna enačba pa je enačba z ločljivima spremenljivkama in jo moremo zapisati v obliki:

$$\frac{dy}{f(y, C_1)} = dx \ .$$

Z integracijo dobimo splošno rešitev prvotne enačbe:

$$\int \frac{dy}{f(y, C_1)} = x + C_2 \ .$$

**Primer 3.3:**

Rešimo enačbo $y\,y'' = (y')^2$ !

REŠITEV:

Uvedemo novo spremenljivko

$$u = y' = \frac{dy}{dx}.$$

Ker je:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy},$$

lahko prvotno enačbo zapišemo v obliki:

$$y\,u\frac{du}{dy} = u^2 .$$

To pa je enačba z ločljivima spremenljivkama, ki ima rešitev

$$u = C_1 x .$$

V tem izrazu upoštevamo $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ in dobimo:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 x .$$

Dobljena enačba pa je zopet enačba z ločljivima spremenljivkama x in y. Njena rešitev se glasi:

$$y = C_2 e^{C_1 x} .$$

□□□

## 3.2 Linearna diferencialna enačba drugega reda

Splošna oblika linearne diferencialne enačba drugega reda je takšna:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) .$$

Pri tem so *p(x), q(x)* in *f(x)* znane zvezne funkcije. V primeru, ko je $f(x) \equiv 0$, je enačba <u>*homogena*</u>, v nasprotnem primeru je <u>*nehomogena*</u>.

Da se pokazati, da za splošno rešitev nehomogene linearne diferencialne enačbe drugega reda velja <u>*izrek:*</u>

*Če je $y_0$ kakšna partikularna rešitev nehomogene linearne diferencialne enačbe drugega reda, $z_1$ in $z_2$ pa linearno neodvisni partikularni rešitvi prirejene homogene enačbe, je splošna rešitev nehomogene enačbe množica funkcij:*

$$y(x) = y_0(x) + C_1 z_1(x) + C_2 z_2(x) ,$$

*pri čemer sta $C_1$ in $C_2$ poljubni konstanti.*