1. KOLOKVIJ IZ ANALIZE I
6. december 2001

1. Naj bo $\xi = 1 + i$.

   a. Zapišite ξ v polarni obliki.
   b. Poiščite realno in imaginarno komponento števila ξ^8.
   c. Določite najmanjše pozitivno število $n \geq 0$, za katerega velja
   $$\xi^{2n} = 2^n.$$

2. Zaporedje $\{a_n\}$ zadošča rekurzivni enačbi
$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2a_n - 1}{2}.$$

   a. Naj bo $a_0 \in [-1, 1]$. Dokažite, da potem vsi členi zaporedja $\{a_n\}$ ležijo na intervalu $[-1, 1]$.
   b. Naj bo $a_0 \in [-1, 1]$. Pokažite, da je zaporedje padajoče in navzdol omejeno. Izračunajte limito. (*Lahko uporabite točko a. tudi, če je niste dokazali*).

   Dodatek[+10 točk]: Ugotovite, za katere vrednosti a_0 je zaporedje konvergentno in za te vrednosti določite limito. (*Pomagajte si s sliko!*).

3. Imamo vrsto
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n - a^{n-1}}{a^{2n}}, \quad a \in \mathbf{R}.$$

   a. Za katera realna števila a je vrsta konvergentna?
   b. Izračunajte N-to delno vsoto
   $$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{a^n - a^{n-1}}{a^{2n}}.$$
   (Namig: upoštevajte enakost $(a^n - a^{n-1})/a^{2n} = 1/a^n - 1/a^{n+1}$.)
   c. Za tiste a, za katere vrsta konvergira, izračunajte njeno vsoto..

4. Funkcija $f : D \to \mathbf{R}$ je dana s predpisom
$$f(x) = \frac{-1 - x}{1 - x}.$$

   a. Določite največjo množico $D \subset \mathbf{R}$, na kateri je funkcija f definirana, in poiščite zalogo vrednosti funkcije f.
   b. Preverite, ali je funkcija injektivna?
   c. Izračunajte:
   $$\underbrace{f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f}_{2001 \text{ krat}}(x)$$