

1. KOLOKVIJ IZ ANALIZE I  
6. december 2001

1. Naj bo  $z = 1 + i$ .

- Zapišite  $z$  v polarni obliki.
- Poiščite realno in imaginarno komponento števila  $z^8$ .
- Določite najmanjše pozitivno število  $n \geq 0$ , za katerega velja

$$z^{2n} = 2^n.$$

2. Zaporedje  $\{a_n\}$  zadošča rekurzivni enačbi

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2a_n - 1}{2}.$$

- Naj bo  $a_0 \in [-1, 1]$ . Dokažite, da vsi členi zaporedja  $\{a_n\}$  ležijo na intervalu  $[-1, 1]$ . (Lahko uporabite indukcijo.)
- Naj bo  $a_0 \in [-1, 1]$ . Pokažite, da je zaporedje padajoče in navzdol omejeno

3. Imamo vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n - a^{n-1}}{a^{2n}}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- Za katera realna števila  $a$  je vrsta konvergentna?
- Izračunajte  $N$ -to delno vsoto

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{a^n - a^{n-1}}{a^{2n}}.$$

(Namig: upoštevajte enakost  $(a^n - a^{n-1})/a^{2n} = 1/a^n - 1/a^{n+1}$ .)

- Za tiste  $a$ , za katere vrsta konvergira, izračunajte njeno vsoto..

4.