1. KOLOKVIJ IZ ANALIZE I

26. november 1996

1. Dani sta rekurzivni zaporedji

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n),$$

$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n},$$

kjer je $0 < u_0 < v_0$. Dokažite:

a) Za vsak $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ velja $u_n < v_n$.

b) Zaporedje $\{u_n\}$ je naraščajoče.

c) Zaporedje $\{v_n\}$ je padajoče.

d) Obe zaporedji konvergirata ter velja $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n$.

2. Določite ničle polinoma

$$z^n + z^{n-1} + \ldots + z + 1 = 0, \quad n \geq 2.$$

Namig: enačbo pomnožite z $(z-1)$.
Če naloge ne znate rešiti v splošnem primeru, jo rešite za $n = 8$.

3. Raziščite konvergenco vrste v odvisnosti od $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n+1)(n+3)}.$$

4. Izračunajte:

a) $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}}\right)$,

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n$.