REŠITEV PRVEGA KOLOKVIJA IZ ANALIZE I UNI

z dne 13. novembra 2002

1. V množici realnih števil reši neenačbo

$$|x^3 - x| \leq x^2 + x.$$

Vsak korak natančno utemelji.
Rešitev: Najprej faktoriziramo izraz: $|x(x-1)(x+1)| \leq x(x+1)$.

- če je $x \in (-\infty, -1) \cup (0,1) \cup (1, \infty)$, je $x(x+1)$ pozitiven in neenačba se prevede na $|x-1| \leq 1$. To nam da rešitev $x \in (0,1) \cup (1,2]$.
- če je $x \in (-1, 0)$, je $x(x+1)$ negativen in neenačba se prevede na $-|x-1| \geq 1$. Ni rešitve.
- v mejnih točkah $x \in \{-1, 0, 1\}$ je neenačba izpolnjena.

Vsi trije primeri skupaj nam dajo rešitev $x \in [0,2] \cup \{-1\}$.

2. V množici kompleksnih števil poišči vse rešitve naslednje enačbe

$$z^6 - 3z^4 + iz^2 - 3i = 0.$$

Rešitev: Levo stran faktoriziramo: $z^2(z^4+i) - 3(z^4+1) = (z^2-3)(z^4+i)$ in dobimo dve možnosti:

- $z^2 = 3$ oziroma $z_{1,2} = \pm\sqrt{3}$
- $z^4 = -i = \cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2)$
  $z_{k+3} = \sqrt[4]{-i} = \cos(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4}) + i\sin(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4})$, $k = 0,1,2,3$ oziroma
  $z_3 = \cos(3\pi/8) + i\sin(3\pi/8)$
  $z_4 = \cos(7\pi/8) + i\sin(7\pi/8)$
  $z_5 = \cos(11\pi/8) + i\sin(11\pi/8)$
  $z_6 = \cos(15\pi/8) + i\sin(15\pi/8)$.

3. Zaporedje je podano s predpisom

$$a_1 = 1/2 \qquad\qquad a_{n+1} = -a_n^2 + 2a_n$$

- Z matematično indukcijo pokaži, da vsi členi zaporedja ležijo med 0 in 1.

  Rešitev:

  $n = 1$: $0 \leq a_1 \leq 1$

  $n \to n+1$: $0 \leq a_{n+1} \leq 1$ bo res takrat ko $0 \leq -a_n^2 + 2a_n \leq 1$ oziroma ko $0 \leq a_n(2 - a_n) \leq 1$ oziroma ko $0 \leq a_n \leq 2$, kar je izpolnjeno po indukcijski predpostavki.

- Pokaži, da je zaporedje naraščajoče.

  Rešitev:

  $n = 1$: $a_2 = 3/4 \geq 1/2 = a_1$

  $n \to n+1$: $a_{n+1} \geq a_n$ bo res takrat ko $-a_n^2 + 2a_n \geq a_n$ oziroma ko $a_n(a_n - 1) \leq 0$ oziroma ko $0 \leq a_n \leq 1$, kar smo že pokazali zgoraj.

- Ali je zaporedje konvergentno? Zakaj? Če je, izračunaj limito.

  Rešitev: Zaporedje je konvergentno, ker je naraščajoče in navzgor omejeno (z 1). Možni limiti dobimo, ko limitiramo rekurzivno formulo: $\lim a_n = a$ in $a = -a^2 + 2a$, oziroma a je 0 ali 1. Ker je a_n večji od $1/2$ za vsak n, je $\lim a_n = 1$.

4. Zapiši splošni člen vrste in ugotovi, če je vrsta konvergentna.

   - $\left(\frac{\sin(1)}{1}\right)^2 + \left(\frac{\sin(2)}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sin(3)}{3}\right)^2 + \ldots$

     Rešitev:

     Splošni člen je $a_n = \left(\frac{\sin(n)}{n}\right)^2$. Vrsto majoriziramo s konvergentno vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, zato je naša vrsta konvergentna.

   - $\frac{1}{1+1^2} + \frac{3}{1+2^2} + \frac{5}{1+3^2} + \ldots$

     Rešitev: Splošni člen je $a_n = \frac{2n-1}{1+n^2}$. Vrsto minoriziramo z divergentno (harmonično) vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (od tretjega člena naprej), zato je naša vrsta divergentna.

Pri vsaki nalogi je bilo možno doseči 25 točk.

Ogledi prvega kolokvija bodo v petek, 22. novembra 2002, ob 13h v P11.