

# ANALIZA II

5. april 2006

Vpisna številka:

Ime in priimek:

Predavalnica:

Vrsta:

Sedež:

1. Poišči vse rešitve enačbe  $(z - i)^4 = z^4$  in jih nariši.
- 

*Rešitev:*

$$(z - i)^4 = z^4$$

Ker  $z = 0$  očitno ni rešitev, je zgornja enačba ekvivalentna naslednji.

$$\left(\frac{z - i}{z}\right)^4 = 1$$

Iščemo torej vse četrte korene enice. To bo še bolj očitno, če uvedemo novo spremenljivko

$$\xi = \frac{z - i}{z}.$$

Najprej torej rešimo enačbo

$$\xi^4 = 1.$$

Rešitve so znane.

$$\xi_k = \cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Konkretno zapisano,  $\xi_0 = 1, \xi_1 = i, \xi_2 = -1$  in  $\xi_3 = -i$ . Rešitve za  $z$  torej dobimo z reševanjem naslednjih enačb:

$$\frac{z - i}{z} = 1, \quad \frac{z - i}{z} = i, \quad \frac{z - i}{z} = -1 \quad \text{in} \quad \frac{z - i}{z} = -i.$$

Prva enačba nima končne rešitve ( $z \rightarrow \infty$ ), iz ostalih treh pa dobimo rešitve

$$z_1 = \frac{i}{1 - i}, \quad z_2 = \frac{i}{2} \quad \text{in} \quad z_3 = \frac{i}{1 + i}.$$

2. Ugotovi za kakšen kot je zarotirana parabola

$$x^2 + 2xy + y^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$$

in jo nariši.

---

*Rešitev:* Koordinatni sistem bomo zavrteli za kot  $\phi$ , ki ga bomo izbrali tako, da bo v zavrnem koordinatnem sistemu parabolo opisovala čim bolj enostavna enačba. To storimo s pomočjo novih koordinat.

$$x = X \cos(\phi) - Y \sin(\phi)$$

$$y = X \sin(\phi) + Y \cos(\phi)$$

Novo koordinate vstavimo v enačbo in malo uredimo.

$$\begin{aligned} X^2(\cos \phi + \sin \phi)^2 + 2XY(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) + Y^2(\sin \phi - \cos \phi)^2 + \dots \\ \dots + \sqrt{2}X(\cos \phi - \sin \phi) - \sqrt{2}Y(\cos \phi + \sin \phi) \end{aligned}$$

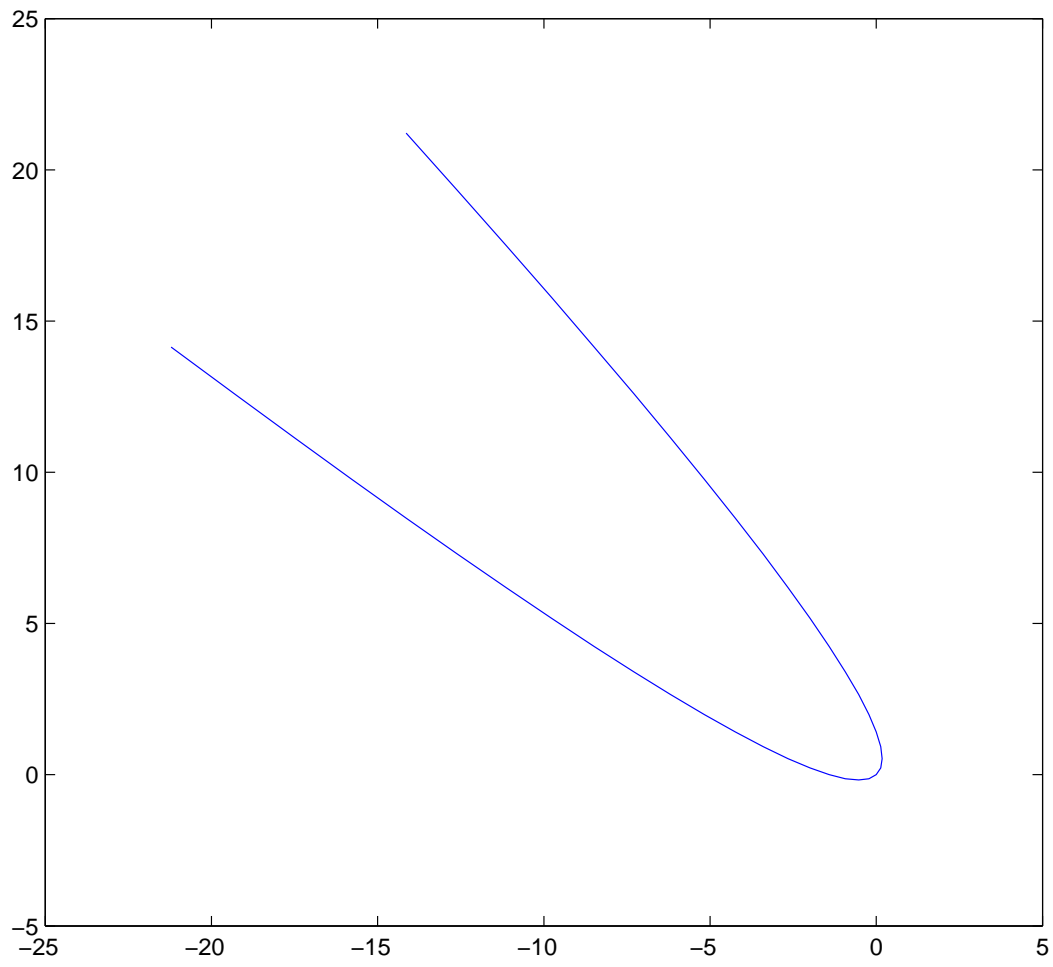
Koristilo bi, če mešani člen ne bi bil prisoten. Zato si izberimo tak kot  $\phi$ , da bo koeficient pri mešanem členu ničelen. Rešiti moramo torej trigonometrično enačbo

$$\cos^2 \phi - \sin^2 \phi = 0$$

Hitro uganemo eno rešitev (ostale nas ne zanimajo, potrebujemo le enega izmed možnih zasukov koordinatnega sistema):  $\phi = \pi/4$ . Dobljeni zasuk vstavimo v enačbo parabole in dobimo precej pohlevno enačbo.

$$Y = X^2$$

Dobljene parabole ni težko narisati.



3. Dana je krivulja  $r = 2 \cos \varphi$ .

- Zapiši enačbo krivulje v kartezičnih koordinatah in jo nariši.
- Za katere  $\varphi$  je krivulja vzporedna s koordinatno osjo  $y$ .
- Izračunaj ploščino krivočrtnega trikotnika, ki ga omejujejo krivulja in poltraka  $\varphi = 0$  ter  $\varphi = \pi/4$ .

---

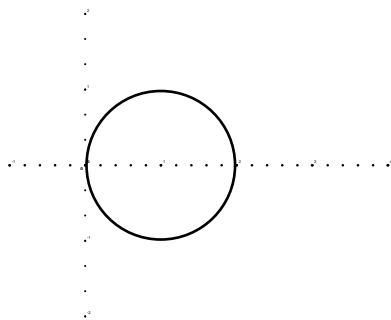
*Rešitev:* Najprej pogledjmo definicijsko območje. Nespodobno bi bilo tolerirati negativen radij, zato argument  $\varphi$  omejimo na interval  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Seveda smo opazili, da je krivulja periodična s periodo  $2\pi$ . Kartezične koordinate dobimo iz polarnih z znano formulo:

$$x(t) = r(t) \cos t, \quad y(t) = r(t) \sin t .$$

Krivulja se v kartezičnih koordinatah torej glasi

$$x(\varphi) = 2 \cos^2 \varphi, \quad y(\varphi) = \sin 2\varphi .$$

Narišimo še skico. Da res pride krožnica, se lahko prepričamo tudi z računom  $(2 \cos^2 \varphi - 1)^2 + (\sin 2\varphi)^2 = 1$ .



Krivulja je vzporedna z  $y$  osjo v točkah, kjer se  $x$  koordinata lokalno ne spreminja, torej  $x'(\varphi) = 0$ .

$$x'(\varphi) = -2 \sin 2\varphi = 0$$

$$2\varphi_k = 0 + k\pi, \quad k = -1, 0, 1, 2$$

$$\varphi_k = \frac{k\pi}{2}, \quad k = -1, 0, 1$$

Rešitev  $\varphi = \pi$  smo izpustili, ker ne leži v definicijskem območju.

Ploščino najlažje izračunamo iz polarnega zapisa.

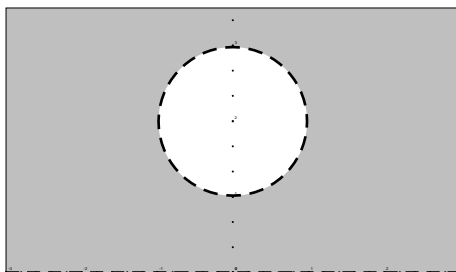
$$S = \int_0^{\pi/4} r(t)^2 dt = \int_0^{\pi/4} 4 \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos t}{2} dt = \pi/2 + \sqrt{2}$$

4. Kam se s preslikavo

$$z \mapsto \frac{1}{z - i}$$

preslika območje  $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0 \text{ in } |z - 2i| > 1\}$ ?

*Rešitev:* Najprej narišimo začetno območje.



Mejo začetnega območja sestavljata krožnica in premica. Najlažja pot je ugotoviti, kam se s preslikavo preslikata meji. Ker imamo opravka z lomljeno linearno transformacijo, se krožnice preslikajo bodisi v krožnice bodisi v premice in podobno tudi premice. Krožnico v ravnini natanko določajo tri točke. Zato na vsaki meji območja izberimo po tri točke in pogledjmo, kam se preslikajo.

Na krožnici naprimer izberemo točke  $i$ ,  $1 + 2i$  in  $3i$ . Njihove slike so (po vrsti)  $\infty$ ,  $(1 - i)/2$  in  $-i/2$ . Slike ležijo na premici, ki jo določata zadnji dve točki.

Na premici pa lahko izberemo točke  $-1$ ,  $0$  in  $1$ , ki se po vrsti preslikajo v  $(-1 + i)/2$ ,  $i$  in  $(1 + i)/2$ . Slike torej ležijo na krožnici s središčem v  $i/2$  in polmerom  $1/2$ .

Nedvomno se območje med mejama preslika na območje med mejama. Skica preslikanega območja torej izgleda nekako takole.

