

1. kolokvij iz Analize I (FRI-UNI)
POIZKUSNI KOLOKVIJ
8.12.2008

Navodilo: VSE ODGOVORE DOBRO UTEMELJITE! Vsako nalogo rešujte na ločeno stran pole. Naloge so enakovredne. Čas reševanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci in formulami. Uporaba kalkulatorja ni dovoljena!

Srečno!

1. S pomočjo matematične indukcije pokažite, da velja formula

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

2. Funkcija f je dana s predpisom

$$f(x) = (x^2 - 4x + 5) e^x.$$

- (a) Izračunajte definicijsko območje, raziščite obstoj ničel, polov, asimptot, lokalnih ekstremov in prevojev funkcije f .
- (b) Ali je funkcija f : a) soda/liha? b) injektivna? c) surjektivna?
- (c) Skicirajte graf funkcije f .
3. Poiščite globalne ekstreme funkcije

$$f(x) = (x - 1)^2 e^x$$

na intervalu $[-2, 2]$.

4. Kocki s stranskim robom a želimo očrtati stožec z najmanjšim možnim volumnom. Izračunajte razmerje med višino in polmerom osnovne ploskve takšnega stožca.

① $n=1: 1=1^2 \checkmark$ $n \rightarrow n+1: \underbrace{1+3+\dots+(2n-1)}_{\substack{\text{I.P. II} \\ n^2}} + (2(n+1)-1) =$
 $= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \checkmark$

② $f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$ $D_f = \mathbb{R}$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

NI NE SODA NE LIHA
 NE INERTIVNA (GRAF)
 NI SURJ. ($\mathbb{Z}_+ = \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$)

NIČEN NI:

$f'(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x = (x-1)^2 e^x$ $E(1, 2e)$ STAC. TČ, PREVOJ
 $f''(x) = (2(x-1) + (x-1)^2)e^x = (x-1)(x+1)e^x$ $S(-1, 10e^{-1})$ PREVOJ
 $f'''(x) = (x^2 + 2x - 1)e^x$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

GRAF ALI $f'''(x)$

③ $f(x) = (x-1)(x+1)e^x$ $f(-2) = 9e^{-2}$ $f(2) = e^2$ $f(-1) = 4e^{-1}$ $f(1) = 0$

G. MAX G. MIN

④

$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

$\frac{h}{r} = \frac{2(h-a)}{a\sqrt{2}} \Rightarrow r = \frac{h \cdot a\sqrt{2}}{2(h-a)}$

$V = \frac{\pi}{3} \frac{h^3 a^2 \cdot 2}{4(h-a)^2} = \frac{\pi a^2}{6} \frac{h^3}{(h-a)^2}$

$V'(h) = \frac{\pi a^2}{6} \frac{3h^2(h-a)^2 - 2h^3(h-a)}{(h-a)^4} = 0$

$h^2(h-a)(3(h-a) - 2h) = 0$

$h^2(h-a)(h-3a) = 0$

DEG.

\downarrow
 $h = 3a \Rightarrow r = \frac{3a^2\sqrt{2}}{4a} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$

$\frac{h}{r} = \frac{4}{\sqrt{2}}$

$\frac{h}{r} = 2\sqrt{2}$