II. FUNKCIJE

1. Osnovni pojmi
2. Sestavljanje funkcij
3. Pregled elementarnih funkcij
4. Zveznost

Kaj je funkcija?

Definicija

Funkcija je predpis, ki vsakemu elementu x iz **definicijskega območja** $D \subset \mathbb{R}$ priredi neko število $f(x) \in \mathbb{R}$.

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

Če D ni posebej podano, je največja množica, kjer ima predpis f smisel.

- x neodvisna spremenljivka
- $y = f(x)$ odvisna spremenljivka
- $Z = \{f(x) \mid x \in D\}$ zaloga vrednosti funkcije f

Graf funkcije

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subset \mathbb{R}^2$$

- Graf funkcije seka poljubno navpično premico največ v eni točki.
- Projekcija grafa na os x je D, projekcija grafa na os y pa je Z.

Injektivnost in surjektivnost

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je

- **injektivna**, če različni točki $x \neq y \in D$ preslika v različni vrednosti $f(x) \neq f(y) \in Z$.
- **surjektivna**, če je $Z = \mathbb{R}$
- Graf injektivne funkcije seka poljubno vodoravno premico v največ eni točki.
- Graf surjektivne premice seka vsako vodoravno premico.

Inverzna funkcija

- Injektivna (!) funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ ima **inverzno funkcijo** $f^{-1} : Z \to \mathbb{R}$.
- Inverzna funkcija f^{-1} številu $x \in Z$ priredi tisto število $y \in \mathbb{R}$, za katerega velja $f(y) = x$:

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x.$$

- Definicijsko območje in zaloga vrednosti se zamenjata: $D_{f^{-1}} = Z_f, \quad Z_{f^{-1}} = D_f$.
- Graf $y = f^{-1}(x)$ dobimo z zrcaljenjem grafa $y = f(x)$ čez premico $y = x$.

Kompozitum ali sestavljena funkcija

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Definirana je samo, če je $Z_g \cap D_f \neq \emptyset$.
Če je f injektivna in f^{-1} njena inverzna funkcija, je

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \text{in} \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x.$$

Primer

$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$, kaj sta $f \circ g$ in $g \circ f$?

Transformacije funkcij

- $g(x) = f(x - a)$ vodoravni premik za a v desno
- $g(x) = f(x) + c$ navpični premik za c navzgor
- $g(x) = f(x/a)$ vodoravni razteg za faktor a
- $g(x) = cf(x)$ navpični razteg za faktor c
- $g(x) = -f(x)$ zrcaljenje preko osi x
- $g(x) = f(-x)$ zrcaljenje preko osi y

Elementarne funkcije

Elementarne funkcije delimo na:

- **algebraične** – dobljene iz konstantnih funkcij $f(x) = c$ in identične funkcije $f(x) = x$ s sestavljanjem, seštevanjem, množenjem in deljenjem ter inverznimi funkcijami
- **transcendetne** – sestavljene iz eksponentnih, logaritemskih, kotnih funkcij in njihovih inverznih funkcij

Algebraične funkcije: potence in koreni

Potence $f(x) = x^n$ in koreni $f(x) = x^{1/n}$

Algebraične funkcije: polinomi

Polinom stopnje n

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n, \quad a_n \neq 0$$

Razcep na nerazcepne faktorje:

$$p(x) = a_n (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_j)(x^2 + p_1 x + q_1) \cdots (x^2 + p_k x + q_k),$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_j$ so **ničle** (ne nujno različne).

Algebraične funkcije: racionalne funkcije

Racionalna funkcija: kvocient dveh polinomov

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + \cdots + b_m x^m}.$$

Okrajšana oblika: števec in imenovalec nimata skupnih faktorjev.
Definicijsko območje: $\mathbb{R} \setminus \{$ničle imenovalca$\}$

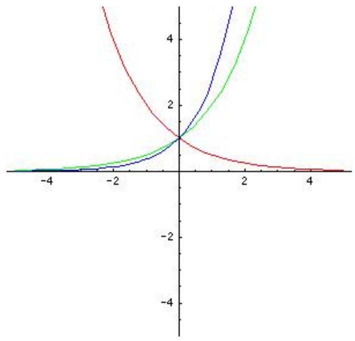
Primeri

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x}}$
2. $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$

Eksponentna funkcija in logaritem

Eksponentna funkcija:

- $f(x) = a^x$, $a > 0, a \neq 1$
- $D = \mathbb{R}$, $Z = (0, \infty)$
- adicijski izrek: $a^{x+y} = a^x a^y$
- naravna eksponentna funkcija: $f(x) = e^x$



Logaritem je inverzna funkcija eksponentne

- $f(x) = \log_a(x)$
- $D = (0, \infty)$, $Z = \mathbb{R}$
- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- naravni logaritem: $\log x = \log_e(x)$ (tudi $\ln x$)

Monotone funkcije

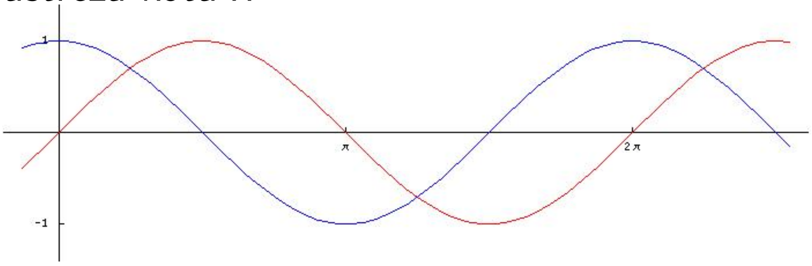
Definicija

Funkcija f je *naraščajoča*, če velja: če je $x < y$, je $f(x) \leq f(y)$.
Funkcija f je *padajoča*, če velja: če je $x < y$, je $f(x) \geq f(y)$.
Funkcija je *monotona*, če je padajoča ali naraščajoča.

- $f(x) = a^x$ je naraščajoča, če je $a > 1$, in je padajoča, če je $0 < a < 1$
- Inverzna funkcija naraščajoče injektivne funkcije je spet naraščajoča, inverzna funkcija padajoče injektivne funkcije pa je padajoča.
- $f(x) = \log_a(x)$ je naraščajoča, če je $a > 1$, in je padajoča, če je $0 < a < 1$.

Kotne funkcije

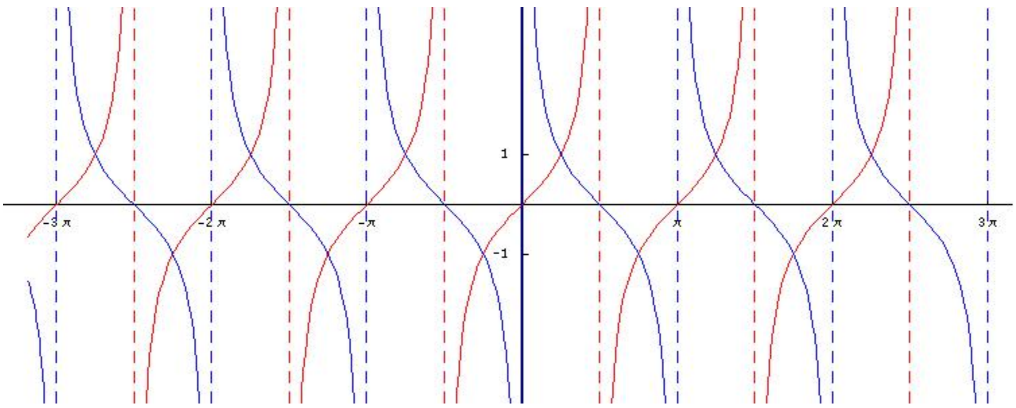
- $(\cos x, \sin x)$ koordinati točke na krožnici $u^2 + v^2 = 1$, ki ustreza kotu x



- omejeni: $Z = [-1, 1]$
- adicijski izreki: $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

Kotne funkcije

- $\text{tg } x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\text{ctg } x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$



- sta neomejeni: $Z = \mathbb{R}$
- adicijski izreki ...

Periodične funkcije

Definicija

Funkcija f je *periodična* s *periodo* ω, če za vsak x velja $f(x+\omega) = f(x)$.
Najmanjšo periodo funkcije f imenujemo *osnovna perioda*.

Zgledi

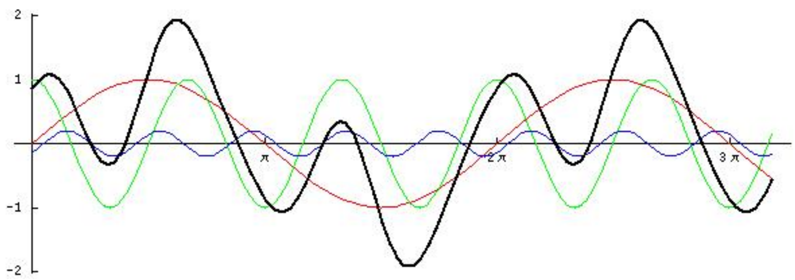
1. $\sin x$ in $\cos x$ sta periodični z osnovno periodo 2π
2. $\operatorname{tg}\, x$ in $\operatorname{ctg}\, x$ sta periodični z osnovno periodo π

Periodično gibanje

Funkcija

$$f(x) = \sin x + \cos(3x)/10 + (\sin(5x - \pi/4))/5$$

opisuje sestavljeno periodično gibanje z osnovno periodo 2π



Primeri periodičnih modelov

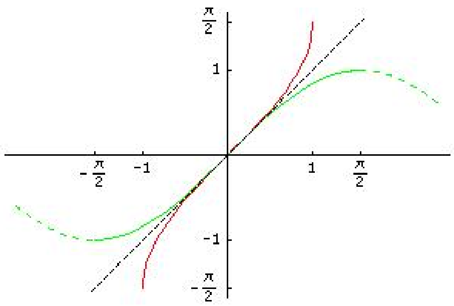
1. EKG
2. dolžina sence fiksnega objekta (vpliv kroženja zemlje okrog svoje osi, okrog sonca,. . .)

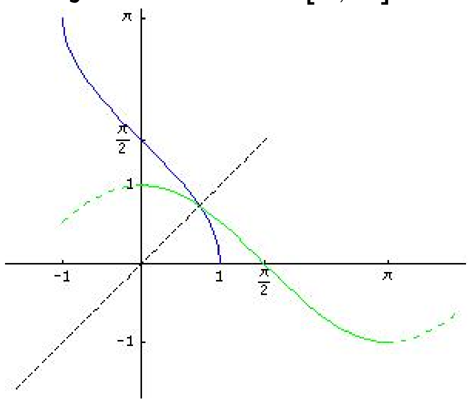
Primer približno periodičnega gibanja: gostota v prometu (vpliv ure, dneva, letnega časa)

Ločne funkcije

Inverzne funkcije kotnih funkcij.

- arcsin x je inverzna funkcija funkcije $\sin x$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$
- arccos x je inverzna funkcija funkcije $\cos x$, $x \in [0, \pi]$



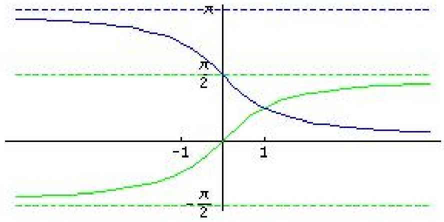


- velja zveza: arcsin $x+$ arccos $x = \pi/2$

Ločne funkcije

Inverzne funkcije kotnih funkcij.

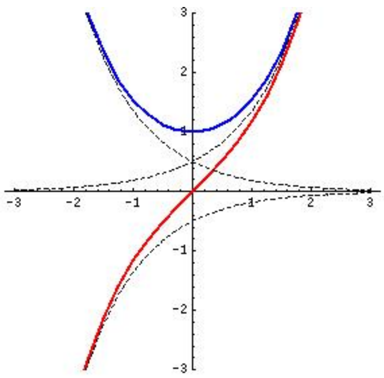
- arctg x je inverzna funkcija funkcije tg x, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$
- arcctg x je inverzna funkcija funkcije ctg x, $x \in (0, \pi)$

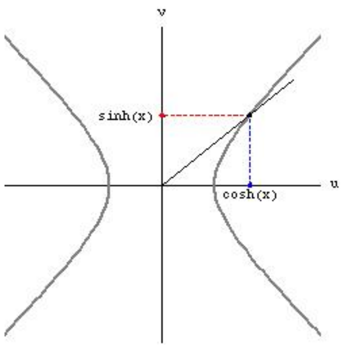


- tudi tu velja zveza: arctg $x+$ arcctg $x = \pi/2$

Hiperbolične funkcije

- hiperbolični kosinus: $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$
- hiperbolični sinus: $\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$





- velja: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- točka s koordinatama $(\cosh(x), \sinh(x))$ leži na hiperboli $u^2 - v^2 = 1$

adicijski izreki:
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$
$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$

Hiperbolične funkcije

- hiperbolični tangen: $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-1}}{e^x + e^{-x}}$
- hiperbolični kotangens: $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-1}}{e^x - e^{-x}}$