Računanje nedoločenih integralov

Praktični nasveti:

- produkte in kvociente poskusimo zapisati kot vsote
- korenov se poskusimo znebiti
- integrali sodih funkcij so lihe (do C natanko) integrali lihih so sode

Zgledi

1. $\int \sin^2 x \, dx$
2. $\int \frac{dx}{x^2 - 3x - 2}$
3. $\int \frac{x^3}{x^2 + 2x + 2}$
4. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$
5. $\int \sqrt{1 - x^2} \, dx$ (trigonometrična substitucija: $x = \sin t$)

Določeni integral in ploščina

- Določeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ je "predznačena ploščina" lika med $[a, b]$ na osi x in grafom $y = f(x)$.
- Približno vrednost ploščine lika izračunamo tako, da lik prekrijemo s kvadratno mrežo in preštejemo vse kvadratke, ki
  - so znotraj lika – (ploščina zaokrožena navzdol)
  - lik skupaj prekrivajo – (ploščina zaokrožena navzdol)
  - se lika dotikajo. . . ,

  približek bo boljši, če bo mreža drobnejša.
- Podobno definiramo (Riemannov) določeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$.

Spodnje in zgornje integralske vsote

$f(x)$ omejena na intervalu $[a, b]$,
$M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}, \quad m = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$

- $D : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ **delitev** intervala $[a, b]$,
- $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$
- **spodnja integralska vsota** ki pripada delitvi D:

$$s_D = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i, \quad m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1} x_i]\}$$

  če je $f(x) > 0$, je to ploščina stolpičastega lika, včrtanega v lik pod grafom
- **zgornja integralska vsota**

$$S_D = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i \quad M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

  ploščina stolpičastega lika, očrtanega liku pod grafom.

Lastnosti spodnjih in zgornjihv sot

- očitno: za vsako delitev D je $s_D \leq S_D$
- če je D' dobljena tako, da D z dodamo delilne točke, je $s_{D'} \geq s_D$ in $S_{D'} \leq S_D$
- manj očitno: za poljubni delitvi D in D' je $s_D \leq S_{D'}$
- za vsako delitev D je $s_D \leq S_1 = M(b-a)$, torej obstaja $i = \inf\{S_D \mid D \text{ delitev}\}$
- za vsako delitev D je $S_D \geq s_1 = m(b-a)$, torej obstaja $I = \sup\{s_D \mid D \text{ delitev}\}$
- števili i in I sta lahko različni (primer?)

Definicija določenega integrala

Definicija

Funkcija f je **integrabilna** na $[a,b]$, če je

$\inf\{S_D \mid D \text{ delitev}\} = \sup\{s_D \mid D \text{ delitev}\} = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, kar je

določeni integral funkcije $f(x)$ na $[a,b]$.

Dopolnimo:

Definicija

$\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$. Če je $a > b$, je $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

Riemannove integralske vsote

- $D: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ delitev intervala $[a, b]$
- $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$
- **Riemannova integralska vsota**, ki pripada delitvi D:

$$\sigma_D = \sum_{i-1}^{n} f(c_i)\Delta_i, \quad c_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

- Za vsako Riemannovo integralsko vsoto je $s_D \leq \sigma_D \leq S_D$.
- $f(x)$ integrabilna, D_k zaporedje čedalje bolj drobnih delitev intervala, tako da gredo vsi $\Delta_i \to 0$, ko $k \to \infty$, σ_k zaporedje pripadajočih Riemannovih integralskih vsot, potem $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$.
- Koliko je $\int_0^1 x^2\,dx$?

Kakšne funkcije so integrabilne?

- Vsaka **zvezna** funkcija na $[a, b]$ je integrabilna na $[a, b]$.
- Funkcija f je **odsekoma zvezna** na $[a, b]$, če je zvezna povsod, razen v končno mnogo točkah $\{c_1, \ldots, c_n\} \subset [a, b]$, in v vsaki točli c_i obstaja leva in desna limita.
  Vsaka taka funkcija je integrabilna na $[a, b]$
- Vsaka **monotona** (tj. naraščajoča ali padajoča) funkcija na $[a, b]$ je integrabilna na $[a, b]$.
- Primer funkcije, ki ni integrabilna na $[a, b]$?

Zveza s ploščino

- P ploščina lika med grafom in intervalom $[a, b]$ na osi x
- če je $f(x) \geq 0$ na $[a, b]$, je $\int_a^b f(x)\, dx = P$,
- če je $f(x) \leq 0$ na $[a, b]$, je $\int_a^b f(x)\, dx = -P$,
- v splošnem je integral **predznačena ploščina**, tj.

$$\int_a^b f(x)\, dx = P_1 - P_2,$$

  kjer je P_1 ploščina dela nad osjo x in P_2 ploščina dela pod osjo x.
- Koliko je $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx, \quad \int_{-2}^2 (2-|x|)\, dx$?

Lastnosti določenega integrala

- $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(z)\, dz = \int_a^b f(\tau)\, d\tau$
- Linearnost:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

- Aditivnost:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

- Monotonost: če je $f(x) \leq g(x)$ na $[a, b]$, je

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

- Posledica monotonosti če je $m = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ in $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$, je

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)$$

  Še ena posledica monotonosti: $|\int_a^b f(x)\, dx| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$

- Če je f liha, je $\int_{-a}^a f(x)\, dx = 0.$
- Če je f soda, je $\int_{-a}^a f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx.$

Povprečna vrednost funkcije

Definicija

Povprečna vrednost funkcije f na intervalu $[a, b]$ je

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx.$$

To je višina pravokotnika z osnovnico na $[a, b]$ in z enako ploščino kot lik pod grafom $y = f(x)$.

Izrek

Če je funkcija $f(x)$ na $[a, b]$ zvezna, obstaja taka točka $c \in [a, b]$, kjer je $f(c) = \mu$, torej je

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a)f(c).$$

Zveza med določenim in nedoločenim integralom

f zvezna na intervalu $[a, b]$, torej tudi zvezna in zato integrabilna na vsakem intervalu $[a, x]$, $x \in [a, b]$.

Izrek (Osnovni izrek integralskega računa)

Če je f zvezna na $[a, b]$, je funkcija

$$F(x) = \int_a^x f(z)\, dz$$

zvezna in odvedljiva na $[a, b]$ in velja $F'(x) = f(x)$.
Funkcija F je torej **nedoločeni integral** *funkcije f na $[a, b]$.*

Posledice

1. Vsaka zvezna funkcija ima svoj nedoločeni integral!
   Dobimo vrsto novih, neelementarnih funkcij, na primer:

$$\begin{aligned} Si(x) &= \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt \quad \text{integralski sinus} \\ Erf(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt \quad \text{funkcija napake} \end{aligned}$$

2. **Newton-Leibnitzova formula** za računanje določenih integralov:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a),$$

   kjer je F (katerikoli) nedoločeni integral funkcije f.

Pravila za računanje določenih integralov

- **Vpeljava nove spremenljivke**:
  če je $u(x)$ odvedljiva na intervalu $[a, b]$ in je $u(a) = \alpha$ in $u(b) = \beta$, $f(u)$ pa je zvezna med α in β, potem je

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(u)\, du,$$

- **Integriranje po delih**:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\, dx.$$

- Oznaka: $[F(x)]_a^b = F(x) \mid_a^b = F(b) - F(a)$

Primeri

1. $\int_1^3 x^4 \log x \, dx$
2. $\int_0^3 |x^2 - 4| \, dx$
3. ploščina enega povezanega lika med krivuljama $y = \sin x$ in $y = \cos x$
4. ploščina med krivuljama $y = x^2$ in $y = 1/(1 + x^2)$
5. $\int_0^1 \frac{x^3}{1 + x^4} \, dx, \int_0^1 \frac{1}{1 + x^4} \, dx$