Lastnosti določenega integrala

- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(\tau)\,d\tau$
- Linearnost:
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$
- Aditivnost:
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
- Monotonost: če je $f(x) \leq g(x)$ na $[a, b]$, je
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$
- Posledica monotonosti: če je $m = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ in $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$, je
$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a)$$
Še ena posledica monotonosti: $|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$
- Če je f liha, je $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$
- Če je f soda, je $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$

Povprečna vrednost funkcije

Definicija

Povprečna vrednost funkcije f na intervalu $[a, b]$ je

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

To je višina pravokotnika z osnovnico na $[a, b]$ in z enako ploščino kot lik pod grafom $y = f(x)$.

Izrek

Če je funkcija $f(x)$ na $[a, b]$ zvezna, obstaja taka točka $c \in [a, b]$, kjer je $f(c) = \mu$, torej je

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a)f(c).$$

Zveza med določenim in nedoločenim integralom

f zvezna na intervalu $[a, b]$, torej tudi zvezna in zato integrabilna na vsakem intervalu $[a, x]$, $x \in [a, b]$.

Izrek (Osnovni izrek integralskega računa)

Če je f zvezna na $[a, b]$, je funkcija

$$F(x) = \int_a^x f(z)\, dz$$

zvezna in odvedljiva na $[a, b]$ in velja $F'(x) = f(x)$.
Funkcija F je torej **nedoločeni integral** *funkcije f na $[a, b]$.*

Posledice

1. Vsaka zvezna funkcija ima svoj nedoločeni integral!
   Dobimo vrsto novih, neelementarnih funkcij, na primer:

$$\begin{aligned} Si(x) &= \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt \quad \text{integralski sinus} \\ Erf(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt \quad \text{funkcija napake} \end{aligned}$$

2. **Newton-Leibnitzova formula** za računanje določenih integralov:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a),$$

   kjer je F (katerikoli) nedoločeni integral funkcije f.

Pravila za računanje določenih integralov

- **Vpeljava nove spremenljivke**:
  če je $u(x)$ odvedljiva na intervalu $[a, b]$ in je $u(a) = \alpha$ in $u(b) = \beta$, $f(u)$ pa je zvezna med α in β, potem je

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(u)\, du,$$

- **Integriranje po delih**:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\, dx.$$

- Oznaka: $[F(x)]_a^b = F(x)\,|_a^b = F(b) - F(a)$

Primeri

1. $\int_1^3 x^4 \log x \; dx$
2. $\int_0^3 |x^2 - 4| \; dx$
3. ploščina enega povezanega lika med krivuljama $y = \sin x$ in $y = \cos x$
4. ploščina med krivuljama $y = x^2$ in $y = 1/(1 + x^2)$
5. $\int_0^1 \frac{x^3}{1 + x^4} \; dx, \int_0^1 \frac{1}{1 + x^4} \; dx$

Integral na neomejenem intervalu

- $f(x)$ integrabilna na vsakem intervalu $[a, t]$, $t \geq a$,

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x) \; dx = \int_a^\infty f(x) \; dx$$

- podobno: $f(x)$ integrabilna na vsakem intervalu $[t, b]$, $t \leq b$,

$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x) \; dx = \int_{-\infty}^b f(x) \; dx.$$

- $f(x)$ integrabilna na $(-\infty, a]$ in $[a, \infty)$,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \; dx = \int_{-\infty}^a f(x) \; dx + \int_a^\infty f(x) \; dx.$$

Primeri

1. $\int_1^{\infty} x^{\alpha}\, dx$
2. $\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx, \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x(1+x^2)}\, dx$
4. **Funkcija Gama**: $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$.
5. **Lalaceova transformiranka** funkcije $f(t)$:
   $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt$

Kriteriji za konvergenco

- Integral $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ obstaja, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak T, da je
  $$\left| \int_{t_1}^{t_2} f(x)\, dx \right| < \varepsilon \quad \text{za vsak} \quad t_1, t_2 > T$$
- **Primerjalni kriterij**: Če je f integrabilna na vsakem $[a, t]$ in je $|f(x)| < g(x)$ za vsak $x \in [a, \infty)$ in je $g(x)$ integrabilna na $[a, \infty)$, je tudi $f(x)$ integrabilna na $[a, \infty)$.
- V kakšnem primeru je racionalna funkcija $f(x) = p_n(x)/q_m(x)$ integrabilne na $[a, \infty)$?

Integral neomejene funkcije

- $f(x)$ zvezna na $[a, b)$ (v b pa ne)

$$\lim_{t \nearrow b} \int_a^t f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

- $f(x)$ zvezna na $(a, b]$

$$\lim_{t \searrow a} \int_t^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx,$$

je $f(x)$ integrabilna na $[a, b]$.

- $f(x)$ zvezna na $[a, b]$, razen v točki $c \in (a, b)$ in integrabilna na $[a, c]$ in na $[c, b]$, potem:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Primeri

1. $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\, dx$
2. V kakšnem primeru je racionalna funkcija $f(x) = p_n(x)/q_m(x)$ integrabilna?
3. $\displaystyle\int_0^1 \log x\, dx$
4. $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\, dx$