Decimalna števila

Vsako število x lahko zapišemo kot *neskončno decimalno število*:

$$x = \pm n.d_1 d_2 d_3 \ldots,$$

kjer

- je n nenegativno celo število, tj. $n = 0$ ali $n = 1 + \cdots + 1$
- so d_i decimalke, tj. $d_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

- Ta zapis ni enoličen, na primer $1.000\ldots = 0.999\ldots$
- Če se števili x in y ujemata v predznaku, v celem delu n in v prvih m decimalkah, potem je $|x - y| < 10^{-m}$.
- Realna števila abstrakten pojem - v realnosti računamo s končnimi decimalnimi števili (ali ulomki).

2. Naravna, cela in racionalna števila

Peanovi aksiomi za naravna števila

- 0 je naravno število
- vsako naravno število a ima svojega naslednika $S(a)$
- različni števili a in a' imata različna naslednika $S(a)$ in $S(a')$
- *Matematična indukcija*: če neka lasnost
  - velja za število 0
  - velja tudi za število $S(a)$, če velja za a

  potem velja za vsa naravna števila.

- Naravna števila se lahko začnejo tudi z 1 in ne z 0 (stvar dogovora)
- *Peanova aritmetika:* oblika Peanovih aksiomov, ki določa pravila za računanje z naravnimi števili; naslednik $S(a)$ je $a + 1$.

Dokazovanje z matematično indukcijo

Če želimo dokazati, da neka trditev velja za vsa naravna števila, dokažemo

1. *začetek indukcije*: trditev velja za prvo naravno število (običajno je to 0 ali 1)
2. *indukcijski korak*: če trditev velja za n (*indukcijska predpostavka*), potem velja tudi za $n+1$

Dokazi z indukcijo

Zgledi

1. Dokažimo enačbo: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$
2. Dokažimo neenačbo: $(1+x)^n \geq 1 + nx$ za vsak $x \geq 0$ in $n \in \mathbb{N}$.
   Premislite, kje smo uporabili pogoj $x \geq 0$. Lahko ta pogoj še olajšamo? Določite največje množico x-ov, na kateri neenačba še velja.
3. Največ na koliko delov lahko razrežemo ravnino z n ravnimi rezi (premicami)? Formulo dokažimo.

Cela števila

- Naravna števila so zaprta za seštevanje in množenje, ne pa za odštevanje in deljenje.
- *Cela števila* dobimo tako, da naravnim številom dodamo vse razlike $n - m$, $n, m \in \mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^-, \quad \mathbb{Z}^- = \{-n, n \in \mathbb{N}\}$

Funkcije iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{Z}$

- *dno (floor)*: $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$
- *strop (ceiling)*: $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid x \leq n\}$
- *znak (sign)*: $\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \\ -1 & ; \quad x < 0 \end{cases}$

Racionalna števila

- Racionalna števila $\mathbb{Q}$ dobimo tako, da celim število dodamo vse kvociente x/y, $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0(!)$
- Vsako racionalno število lahko predstavimo kot *okrajšan ulomek* x/y, $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}, y \neq 0$, x in y nimata skupnih deliteljev.
- Množica $\mathbb{Q}$ je prav tako urejen komutativen obseg.
- Racionalna števila so *gosta* v realnih številih: za vsako realno štvilo x in za vsako natančnost ε obstaja racionalno število q, ki se razlikuje od x za manj kot ε: $|x - q| < \varepsilon$.
- *Iracionalna števila*: realna števila, ki niso racionalna.

3. Omejene podmnožice realnih števil

A naj bo neprazna podmnožica realnih števil $\mathbb{R}$

Definicija

Množica A je **navzgor omejena**, če ima **zgornjo mejo**, to je tako število $M \in \mathbb{R}$, da je $x \leq M$ za vsak $x \in A$.
Množica A je *navzdol omejena*, če ima **spodnjo mejo**, to je tako število $m \in \mathbb{R}$, da je $x \geq m$ za vsak $x \in A$.
Omejena množica je navzgor in navzdol omejena.

Ekvivalenten opis: množica je *omejena*, kadar obstaja tako število M, da je $|x| \leq M$ za vsak $x \in A$.

Navzgor omejena množica A ima veliko različnih zgornjih mej

Definicija

- *Natančna zgornja meja* ali *supremum*, $\sup A$, navzgor omejene množice A je najmanjša med vsemi njenimi zgornjimi mejami.
- *Natančna spodnja meja* ali *infimum*, $\inf A$, navzdol omejene množice A je največja med vsemi njenimi spodnjimi mejami.

Lastnost kontinuuma (Dedekindov aksiom):

Za vsako navzgor omejeno množico $A \subset \mathbb{R}$ obstaja supremum $\sup A \in \mathbb{R}$.

- Če je $\sup A \in A$, ga imenujemo *maksimum*, $\max A$.
- Če je $\inf A \in A$, ga imenujemo *minimum*, $\min A$.

Zgled

Pokažimo, da je množica $A = \left\{x \mid \sqrt{1-x^2} \geq \frac{1}{2}\right\}$ navzdol in navzgor omejena. Določimo $\sup A$ in $\inf A$. Ali sta to max in min?

Zgled

Množica $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ je navzgor omejena (če je $x > 2$, potem $x \notin A$, torej je $M = 2$ zgornja meja) in neprazna (na primer $1 \in A$), torej ima natančno zgornjo mejo $\sup A$.
Za število $\sup A$ velja $(\sup A)^2 = 2$ (preverimo, da ne more veljati niti $(\sup A) > 2$ niti $(\sup A) < 2$). Torej $\sup A = \sqrt{2}$.

Na podoben način lahko dokažemo:

Posledica

- *Za vsako pozitivno realno število x obstaja tako (natanko določeno) pozitivno realno število y, da je $y^2 = x$ (število y označimo z $\sqrt{x}$).*
- *Za vsak pozitivno realno število x in vsak $n \geq 1$ obstaja natanko določeno pozitivno število y, da je $y^n = x$ (označimo ga z $\sqrt[n]{x}$).*

- Racionalna števila $\mathbb{Q}$ nimajo lastnosti kontinuuma!
- Primer navzgor omejene množice, ki nima natančne zgornje meje v $\mathbb{Q}$: $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$
- $\sup A = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$,
- števila $\sqrt{2}$ ne moremo zapisati v obliki okrajšanega ulomka.