4. Zaporedja

Zaporedje je preslikava

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n, \quad n: \text{ indeks}, a_n: \ n\text{-ti člen}$$

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

Zaporedje lahko opišemo

- eksplicitno: $a_n = f(n)$
- rekurzivno:
  - a_0, $a_{n+1} = f(a_n)$ za $n \geq 1$ (enočlena relurzija)
  - $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$, $a_{n+k} = f(a_n, \ldots, a_{n+k-1})$ (k-člena rekurzija)

Primeri zaporedij

Zgledi

1. $a_n = (-1)^n, \quad -1, 1, -1, 1, \ldots$
2. aritmetično zaporedje:
   - eksplicitni opis: $a_n = a + nd$
   - rekurzivni opis: $a_0 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$
3. geometrijsko zaporedje
   - eksplicitni opis: $a_n = aq^n$
   - rekurzivni opis: $a_0 = a$, $a_{n+1} = a_n q$
4. Fibonaccijevo zaporedje:
   $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, \quad 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Geometrijska slika

Zgledi

1. $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$
2. $a_0 = 3, \quad a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \dfrac{2}{a_{n-1}}\right)$

Limita zaporedja

Definicija

Število a je **limita** zaporedja (a_n)

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks N, da je

$$|a - a_n| < \varepsilon$$

za vsak $n \geq N$.
Zaporedje (a_n) je **konvergentno**, če ima limito.

Računanje limit

Če je $\lim a_n = a$ in $\lim b_n = b$, je

- $\lim(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b$ za vsak $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\lim a_n b_n = ab$
- če je $b_n \neq 0$ za vsak (dovolj velik) n in $b \neq 0$, le $\lim a_n / b_n = a/b$

Izrek

(Izrek o sendviču): če za vsak n velja $a_n \leq b_n \leq c_n$ in $\lim a_n = \lim c_n = a$, je tudi $\lim b_n = a$.

Pogoji za konvergenco zaporedij

Potreben pogoj:

Vsako konvergentno zaporedje je omejeno.

Definicija

Zaporedje je **naraščajoče**, če je $a_n \leq a_{n+1}$ za vsak n, in je **padajoče**, če je $a_n \geq a_{n+1}$ za vsak n.

Izrek

Naraščajoče zaporedje je konvergentno natanko takrat, kadar je navzgor omejeno in velja $\lim a_n = \sup a_n$.

Primeri

1. $\lim a^n$, $a \in \mathbb{R}$
2. $\lim(1 + 1/n)^n$
3. $a_0 = 3, \quad a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \dfrac{2}{a_{n-1}}\right)$
   - padajoče
   - navzdol omejeno
   - limita $a = \lim a_n$ zadošča enačbi $a = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{2}{a}\right)$.