III. ODVOD

Diferenčni kvocient

f zvezna funkcija, $a \in D$ točki v notranjosti definicijskega območja, tj. $(a - \delta, a + \delta) \subset D$ za nek $\delta > 0$

Definicija

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

je **diferenčni kvocient** funkcije f v točki a.

To je:

- relativna sprememba odvisne spremenljivke $y = f(x)$ ob majhni spremembi h neodvisne spremenljivke
- smerni koeficient sekante na graf skozi točki $(a, f(a))$ in $(a + h, f(a + h))$.

Odvod

Definicija

Odvod funkcije f v točki a je limita diferenčnega kvocienta

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Funkcija je **odvedljiva** v točki a, če obstaja $f'(a)$.

Odvod je

- relativna sprememba odvisne spremenljivke y pri zelo majhni spremembi neodvisne spremenljivke iz a v $a+h$.
- mera za **občutljivost** spremenljivke y na majhne sremebe x-a okrog točke a.
- smerni koeficient tangente na graf v točki $(a, f(a))$.

Računanje odvodov iz definicije

Zgledi

1. $f(x) = c$
2. $f(x) = x$
3. $f(x) = 1/x$
4. $f(x) = e^x$
5. $f(x) = \sin x$

Levi in desni odvod

- **Levi odvod** je leva limita diferenčnega kvocienta, **desni odvod** pa desna limita diferenčnega kvocienta.
- Funkcija je **odvedljiva z leve**, če obstaja levi odvod in **odvedljiva z desne**, če obstaja desni odvod.
- Funkcija je odvedljiva natanko takrat, kadar sta levi in desni odvod enaka.
- Primer: $f(x) = |x|$
- Če je levi odvod v točki a različen od desnega, se graf v tej točki "prelomi".

Pravila za računanje odvodov

- $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $(f(u(x)))' = f'(u(x))u'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
- $(f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'(y)}$, kjer je $f(y) = x$ (tj. $f^{-1}(x) = y$).

Tabela elementarnih odvodov

f(x)	f'(x)	f(x)	f'(x)
$x^n, n \in \mathbb{R}$	nx^{n-1}		
e^x	e^x	$\log x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\text{tg } x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\text{ctg } x$	$-\frac{1}{(\sin x)^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arctg } x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{sh } x$	$\text{ch } x$	$\text{ch } x$	$\text{sh } x$

Diferencial

Definicija

Izraz $df = f'(a)dx$ je **diferencial** funkcije f v točki a pri spremembi dx.

- Diferencial je enak spremembi y koordinate točke na tangenti na graf pri spremembi x koordinate za dx.
- Linearno funkcijo $L(x) = f(a) + df = f(a) + f'(a)(x - a)$ imenujemo **linearna aproksimacija funkcije** f. Njen graf $y = L(x)$ se ujema s tangento graf $y = f(x)$ funkcije f v točki $(a, f(a))$.
- Diferencial je torej enak spremembi vrednosti linearne aproksimacije $L(x) - L(a)$ pri spremembi x-a za $dx = x - a$.

Razne oznake za odvod

- Oznake z diferenciali: če je $y = f(x)$, pišemo tudi

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

  Pravila za odvajanje v tej obliki:
  - odvod vsote: $\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$
  - odvod kompozituma $y = f(u(x))$: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$
  - odvod inverzne funkcije: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$
- Odvod funkcije $\varphi(t)$, odvisne od t (npr. od časa) pogosto pišemo $\dot{\varphi}(t)$.

Uporaba diferenciala

- Pri majhnih vrednostih $dx = (x - a)$ tangenta zelo malo odstopa od grafa, zato je

$$\Delta y = f(a+h) - f(a) \sim df = f'(a)dx.$$

  Vrednost linearne aproksimacije, dobljene z diferencialom, je tako kar dobra ocena za $y = f(x)$:

$$f(x) = f(a) + f(a+dx) \sim f(a) + f'(a)(x-a).$$

- Na primer, kako na hitro ocenimo letno obrestno mero iz podatka za mesečno?
- Za majhne kote x je $\sin x \sim x$ (od prej vemo, da je $\sin x < x$ za $x > 0$).
- Tangetna metoda za iskanje ničel funkcije $f(x)$: sestavimo zaporedje približkov, kjer je x_{n+1} tam, kjer tangenta na graf v točki $(x_n, f(x_n))$ seka os x.

Naraščanje in padanje

- Če je $f'(a) > 0$, funkcijska vrednost v točki a narašča.
- Če je $f'(a) < 0$, funkcijska vrednost v točki a pada.
- Če je $f'(a) = 0$???

Stacionarne točke

Definicija

Točko a, kjer je $f'(a) = 0$ imenujemo **stacionarna** ali **kritična točka** funkcije f.

V stacionarni točki je

- $\Delta f \sim df = 0$, torej se funkcijska vrednost okoli take točke zelo počasi spreminja.
- tangenta na graf vodoravna.

Lokalni ekstremi

Definicija

Funkcija f ima v točki a **lokalni maksimum**, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) \leq f(a)$ za vsak x, ki je oddaljen od a za manj kot δ.
Funkcija f ima v točki a **lokalni minimum**, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) \geq f(a)$ za vsak x, ki je oddaljen od a za manj kot δ.

Lokalni ekstrem = lokalni minimum ali lokalni maksimum.

Zgled

Primer: $f(x) = |x|$ ima v točki $x = 0$ lokalni minimum (pravzaprav celo globalni minimum).

Potreben pogoj za lokalni ekstrem

Izrek

Če je funkcija f v točki a, kjer je lokalni ekstrem, odvedljiva, potem je a stacionarna točka.

Pogoj $f'(a) = 0$ je za odvedljive funkcije *potreben pogoj* za lokalni ekstrem v točki a.
Stacionarne točke so kandidati za lokalne ekstreme.

Zgled

Primer: $f(x) = x^3$, točka $x = 0$ **je** stacionarna točka, vendar $f(0) = 0$ **ni** lokalni ekstrem.

Pogoj $f'(a) = 0$ za lokalni ekstrem v točki a torej ni zadosten!

Primeri

1. Kam postaviti avtobusno postajo, če je eno naselje tik ob cesti, še dve (podobne velikost) pa sta simetrično postavljeni vsako na svoji strani ceste in želimo, da je povprečna prehojena pot potnikov najmanjša možna.
2. **Metoda najmanjših kvadratov:**
   Dane so tri točke (ali več), iščemo premico $y = ax$, ki se jim najbolje prilega.
   $A(1, 7)$, $B(2, 13)$, $C(3, 18)$