Naraščanje in padanje

- Če je $f'(a) > 0$, funkcijska vrednost v točki a narašča.
- Če je $f'(a) < 0$, funkcijska vrednost v točki a pada.
- Če je $f'(a) = 0$???

Stacionarne točke

Definicija

Točko a, kjer je $f'(a) = 0$ imenujemo **stacionarna** ali **kritična točka** funkcije f.

V stacionarni točki je

- $\Delta f \sim df = 0$, torej se funkcijska vrednost okoli take točke zelo počasi spreminja.
- tangenta na graf vodoravna.

Lokalni ekstremi

Definicija

Funkcija f ima v točki a **lokalni maksimum**, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) \leq f(a)$ za vsak x, ki je oddaljen od a za manj kot δ.
Funkcija f ima v točki a **lokalni minimum**, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) \geq f(a)$ za vsak x, ki je oddaljen od a za manj kot δ.

Lokalni ekstrem = lokalni minimum ali lokalni maksimum.

Zgled

Primer: $f(x) = |x|$ ima v točki $x = 0$ lokalni minimum (pravzaprav celo globalni minimum).

Potreben pogoj za lokalni ekstrem

Izrek

Če je funkcija f v točki a, kjer je lokalni ekstrem, odvedljiva, potem je a stacionarna točka.

Pogoj $f'(a) = 0$ je za odvedljive funkcije *potreben pogoj* za lokalni ekstrem v točki a.
Stacionarne točke so kandidati za lokalne ekstreme.

Zgled

Primer: $f(x) = x^3$, točka $x = 0$ **je** stacionarna točka, vendar $f(0) = 0$ **ni** lokalni ekstrem.

Pogoj $f'(a) = 0$ za lokalni ekstrem v točki a torej ni zadosten!

Primeri

1. **Metoda najmanjših kvadratov:**
   Dane so tri točke (ali več), iščemo premico $y = ax$, ki se jim najbolje prilega.
   $A(1,7)$, $B(2,13)$, $C(3,18)$

Primer iz ekonomije

- $C(x)$ – *funkcija stroškov*, $C'(x)$ – *mejni stroški*, $c(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ – *povprečni stroški*
- Kdaj je $c(x)$ minimalna?
- Primer: $C(x) = 2600 + 2x + 0.001x^2$
- $p(x)$ – funkcija cene, $R(x) = xp(x)$ – *prihodkovna funkcija*, $P(x) = R(x) - C(x)$ – *funkcija dobička*
- Dobiček je maksimalen, kadar so mejni stroški enaki mejnim prihodkom.
- Primer: $p(x) = 3.5 - 0.0001x$, pri kakšni prozvodnji je dobiček največji?

Odvedljivost na intervalu

Definicija

Funkcija je **odvedljiva na zaprtem intervalu** $[a, b]$, če je odvedljiva v vsaki točki $x \in (a, b)$, odvedljiva z desne v točki $x = a$ in odvedjiva z leve v točki $x = b$.

Zgledi

- $f(x) = \sqrt{(2x-1)^3}$ je odveljiva na $D = [1/2, \infty)$,
- $f(x) = \sqrt{2x-1}$ ni odveljiva na $D = [1/2, \infty)$,
- $f(x) = \arcsin x$ ni odvedljiva na $D = [-1, 1]$.
- $f(x) = \arcsin(2x/(1+x^2))$

Trije izreki o odvedljivih funkcijah

1. **Rolleov izrek**: Če je f odvedljiva na $[a, b]$ in je $f(a) = f(b)$, obstaja točka $c \in (a, b)$, kjer je $f'(c) = 0$.
2. **Lagrangeov izrek**: Če je f odvedljiva na $[a, b]$, obstaja točka $c \in (a, b)$, kjer je odvod enak relativni spremembi funkcijske vrednosti na celem intervalu
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$
3. **Cauchyjev izrek**: Če sta f in g odvedljivi na $[a, b]$ in je $g'(x) \neq 0$ za vsak $x \in (a, b)$, potem obstaja točka $c \in (a, b)$, kjer je
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Nekaj posledic

- Če je $f'(x) = 0$ za vsak $x \in (a, b)$, je f konstantna na (a, b).
- Če za funkciji $f(x)$ in $g(x)$, ki sta zvezni na $[a, b]$ in odvedljivi na (a, b), velja $f(a) = g(a)$ in $f'(x) < g'(x)$ na (a, b), je $f(b) < g(b)$.

Primeri:

1. $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$ za $x > 0$
2. $|sin\alpha - \sin\beta| \leq |\alpha - \beta|$ za vsak α, β

Uporaba: nedoločeni izrazi

f in g odvedljivi na nekem intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, kjer je $g'(x) \neq 0$ za $x \neq a$.

Prvo L'Hospitalovo pravilo: izrazi oblike $\frac{0}{0}$

Če velja:

- $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ in
- $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, kjer je L neko število, ∞ ali pa $-\infty$,

potem je $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Pravilo velja tudi v primeru, ko $x \searrow a$, $x \nearrow a$, $x \to \infty$ ali $x \to -\infty$.

Primeri: $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$, $\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x - 1}$, $\lim_{x \searrow \pi} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$

f in g odvedljivi na $(a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$, kjer je $g'(x) \neq 0$.

Drugo L'Hospitalovo pravilo: izrazi oblike $\dfrac{\infty}{\infty}$

Če velja:

- $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ in
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, kjer je L neko število, ∞ ali pa $-\infty$,

potem je $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

Tudi to pravilo velja tudi za $x \searrow a$, $x \nearrow a$, $x \to \infty$ in $x \to -\infty$.
Primer: $\lim x \to \infty x^n e^{-x}$, $\lim_{x \nearrow 0} x^n \log x$

Uporaba: monotone funcije

Za **odvedljive funkcije** velja: funkcija f je na $[a, b]$ naraščajoča natanko takrat, kadar je $f'(x) \geq 0$ na (a, b), padajoča pa je natanko takrat, kadar je $f'(x) \leq 0$ na (a, b). **Primer**:

1. Kaj so območja padanja in naraščanja funkcije $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$?
2. Za funkcijo $f(x) = \dfrac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}$ poiščimo intervale padanja in naraščanja in narišimo graf.

Prvi zadosten pogoj za lokalni ekstremi

Funkcija ima v stacionarni točki c lokalni ektrem, če odvod $f'(x)$ ob prehodu skozi c spremeni predznak. V točki c je

- lokalni minimum, če se predznak $f'(x)$ spremeni z $-$ na $+$
- lokalni maksimum, če se predznak $f'(x)$ spremeni s $+$ na $-$

Risanje grafov

Primer: $f(x) = x^2 \log x$

Globalni ekstremi

Funkcija, ki je zvezna na zaprtem intervalu $[a, b]$, zavzame svoj maksimum in minimum na tem intervalu. Če je f odvedljiva, sta maksimum in minimum

- v kritični točki ali
- na robu intervala.

Primer optimizacijske naloge

Kam postaviti avtobusno postajo, če je eno naselje tik ob cesti, še dve (podobne velikost) pa sta simetrično postavljeni vsako na svoji strani ceste in želimo, da je povprečna prehojena pot potnikov najmanjša možna.

Višji odvodi

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= (f'(x))', & \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \\
&\dots & &\dots \\
f^{(n)}(x) &= (f^{(n-1)}(x))', & \frac{d^ny}{dx^n} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)
\end{aligned}
$$

Konveksne in konkavne funkcije

Definicija

Če za poljubni točki $x_1, x_2 \in [a, b]$ in $\lambda \in [0, 1]$ velja

- $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_2) + (1-\lambda)f(x_2)$, je funkcija f na intervalu $[a, b]$ **konveksna**
- $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_2) + (1-\lambda)f(x_2)$, je funkcija f na intervalu $[a, b]$ **konkavna**

Točka c, kjer se funkcija spremeni iz konveksne v konkavno ali obratno, se imenuje **prevoj**.

Geometrijski opis: Če je funkcija **konveksna**, je graf pod sekanto, če je **konkavna**, je graf nad sekanto. V **prevoju** graf preide z ene na drugo stran tangente.

Uporaba drugega odvoda

Če je f **dvakrat odvedljiva** na $[a, b]$,

- je konveksna na $[a, b]$ natanko takrat, kadar je $f''(x) \geq 0$ na $[a, b]$
- je konkavna na $[a, b]$ natanko takrat, kadar je $f''(x) \leq 0$ na $[a, b]$.
- je $f''(c) = 0$ v prevoju c – potreben (ampak ne zadosten) pogoj za prevoj.