Višji odvodi

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= (f'(x))', & \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \\
f'''(x) &= (f''(x))', & \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \\
&\dots & &\dots \\
f^{(n)}(x) &= (f^{(n-1)}(x))', & \frac{d^ny}{dx^n} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)
\end{aligned}
$$

Konveksne in konkavne funkcije

Definicija

Če za poljubni točki $x_1, x_2 \in [a, b]$ in $\lambda \in [0, 1]$ velja

- $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$, je funkcija f na intervalu $[a, b]$ **konveksna**
- $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$, je funkcija f na intervalu $[a, b]$ **konkavna**

Točka c, kjer se funkcija spremeni iz konveksne v konkavno ali obratno, se imenuje **prevoj**.

Geometrijski opis: Če je funkcija **konveksna**, je graf pod sekanto, če je **konkavna**, je graf nad sekanto. V **prevoju** graf odvedljive funkcije preide z ene na drugo stran tangente.

Uporaba drugega odvoda

Za **dvakrat odvedljivo** funkcijo f velja, da

- je konveksna na $[a, b]$ natanko takrat, kadar je $f''(x) \geq 0$ na $[a, b]$
- je konkavna na $[a, b]$ natanko takrat, kadar je $f''(x) \leq 0$ na $[a, b]$.
- je $f''(c) = 0$ v prevoju c – potreben (ampak ne zadosten) pogoj za prevoj.

Taylorjevi polinomi

- Taylorjev polinom prve stopnje 1 okrog točke a ali linearna aproksimacija:

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = f(a) + df$$

- Taylorjev polinom druge stopnje:

$$T_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

- Taylorjev polinom stopnje n:

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Taylorjev polinom stopnje n ima funkcijsko vrednost in vse odvode do n-tega v točki a enake kot f.

Taylorjev izrek

Izrek

Za funkcijo f, ki je vsaj $(n+1)$-krat odvedljiva v točki a in na nekem intervalu okrog a, velja:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

kjer je $T_n(x)$ Taylorjev polinom stopnje n okrog točke a, ostanek $R_n(x)$ pa je enak

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

in je c neka točka med a in x.

Uporaba Taylorjeve formule

1. Približno računanje funkcijskih vrednosti in ocena napake:
   - Kako dobra je ocena $\sin x \sim x$?
   - Računanje funkcij (razen algebraičnih) je v večini primerov implementirano z razvojem v T. formulo.
2. Računanje nedoločenih izrazov:
   - Koliko je $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x - 1 - x}{\sin(x^2)}$?
3. Lokalna obnašanje funkcije: blizu točke a je $f(x)$ približno enaka prvemu neničelnemu členu v razvoju v Taylorjevo formulo - višji členi so pri majhnih vrednostih $|x-a|$ zanemarljivi.

Drugi zadostni pogoj za lokalni ekstrem

a stacionarna točka funkcije f, tj. $f'(a) = 0$. Naj bo

$$f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{in} \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Potej je $f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$, sledi

Izrek

- *Če je n liho število, v točki a ni lokalnega ekstrema,*
- *če je n sodo število, je v točki a lokalni minimum, kadar je $f^{(n)}(a) < 0$ in lokalni maksimum, kadar je $f^{(n)}(a) > 0$.*