Vaje Analiza I - 2. teden

Naloga 1. *Skiciraj množico tistih števil na intervalu* $[0,1]$*, ki jih v decimalnem zapisu lahko zapišemo z neskončnim zaporedjem števk* 0 *in* 9*. Takšna množica ima posebno ime, Cantorjeva*[1] *ji pravimo.*

Opomba:
Originalna (trojiška) Cantorjeva množica je definirana podobno; vzamemo tista števila na intervalu $[0,1]$*, ki se v neskočnem trojiškem zapisu dajo zapisati zgolj s števkama* 0 *in* 2*.*

Naloga 2. *Razišči obstoj najmanjšega elementa (minimum), največjega elementa (maksimum), najmanjše zgornje meje (supremum) in največje spodnje meje (infimum) v naslednjih množicah.*

1. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}^+$ *in* $\mathbb{R}^-$
2. $A = \{x \in \mathbb{R}, \quad x^4 \leq 7\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Q}, \quad x^4 \leq 7\}$
3. $B = \{e^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}\}$
4. $C = \{\frac{x^2-1}{1+x^2}, \quad x > 2\}$

Naloga 3. *Program na vhodu sprejema števila, večja od* 1 *in nato iterativno računa po naslednjem algoritmu:*

- *Če je število* x *na vhodu enako* e*, začni novo iteracijo s številom* $\pi \cdot e + 1/e$*.*
- *Sicer:*
  - *Če je število* x *na vhodu večje od 1, ga logaritmiraj in z rezultatom prični naslednjo iteracijo.*
  - *Sicer izračunaj* $\frac{3}{1+10^x}$ *in to vrednost vrni na izhodu. Končaj.*

Ali se algoritem vedno konča po končno korakih (obravnavamo idealen primer brez zaokrožitvenih napak)? Kaj lahko poveš o mejah množice možnih rezultatov?

Naloga 4. *Množica* A *naj bo sestavljena iz števil na intervalu* $[0,1]$*, ki jih lahko zapišemo z neskončnim zaporednjem decimalk, v katerem se mora vsaj enkrat pojaviti števka* 9*. Razišči obstoj* $\sup(A)$*,* $\inf(A)$*,* $\max(A)$ *in* $\min(A)$*.*

Naloga 5. *S pomočjo matematične indukcije dokažite Bernoullijevo neenakost: Naj bo* $x > -1$ *realno in* n *naravno število. Potem velja:*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \ .$$

Naloga 6. *Dokaži.*

$$\forall n \in \mathbb{N}: \qquad \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set

Naloga 7. *Ugani formulo za število diagonal konveksnega mnogokotnika in jo nato preveri z matematično indukcijo.*

Naloga 8. *Ugani formulo za izračun vsote prvih n naravnih števil (uporabiš lahko trik mladega Gaussa). Nato se s pomočjo matematične indukcije prepričaj, da se pri ugibanju nisi zmotil.*

Naloga 9. *Preveri pravilnost spodnjih formul s pomočjo matematične indukcije.*

1. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$
2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
4. $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{1-x^2}$, *če* $x \neq 1$

Naloga 10. *Formula za najmanjše število potez rešitve problema Hanojskih stolpičev*[2] *z n diski in tremi stolpci se glasi:*

$$d_n = 2^n - 1 \ .$$

Dokaži veljavnost formule s pomočjo matematične indukcije.

Naloga 11. *Dokaži, da je za vsako naravno število n število $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ deljivo z 133.*

Naloga 12. *Dokaži, da je za vsako naravno število n število $71^{n+1} - 1$ deljivo z 72. Ali znaš trditev dokazati tudi brez uporabe indukcije?*

Naloga 13. *Poišči polinom p tretje stopnje z ničelnim prostim členom, za katerega velja zveza*

$$p(x) - p(x-1) = x^2.$$

Nato s pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Naloga 14. *Dokaži, da za poljuben $n \in \mathbb{N}$ velja:*

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Namig: Očitno velja

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Poizkusi dokazati, da je desna stran večja ali enaka eni polovici. Seveda je potrebno tudi utemeljiti, zakaj je s tem originalna naloga dokazana.

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi

Naloga 15. *Definirajmo naslednji dve celoštevilski funkciji.*

- $\lfloor x \rfloor$ *je največje celo število, ki je manjše ali enako* x.
- $\lceil x \rceil$ *je najmanjše celo število, ki je večje ali enako* x.

Skiciraj grafa teh dveh funkcij in se prepričajte, da veljajo naslednje zveze.

1. $\lfloor x \rfloor = x \quad \iff \quad x \in \mathbb{Z} \quad \iff \quad \lceil x \rceil = x$
2. $x - 1 \quad < \quad \lfloor x \rfloor \quad \leq \quad x \quad \leq \quad \lceil x \rceil \quad < \quad x + 1$
3. $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ *in* $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
4. $\lfloor x \rfloor = n \in \mathbb{Z} \quad \iff \quad n \leq x < n + 1$

Naloga 16. *Koliko celih števil vsebuje zaprti interval* $[a, b]$*, kjer sta* $a, b \in \mathbb{R}$ *? Kaj pa polodprti interval* $[a, b)$ *in odprti interval* (a, b) *? Iskane količine izrazi s funkcijama dno (*$\lfloor x \rfloor$*) in strop (*$\lceil x \rceil$*)*

Naloga 17. *Dokaži, da za vsako pozitivno realno število* x *veljata spodnji enačbi.*

$$\left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil \qquad \text{in} \qquad \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$$

Naloga 18. *Naj bo* $n \in \mathbb{Z}$ *in* $m \in \mathbb{Z}^+$*. Dokaži, da velja zveza:*

$$\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n + m - 1}{m} \right\rfloor$$