Vaje Analiza 1 - 3. teden

1. Določi maksimum, minimum, supremum, infimum, stekališča in limito zaporedja
$$b_n = a^n$$
za dan $a \in \mathbb{R}$ in $n \geq 1$, v kolikor kaj od naštetega obstaja.

   (Pri tem loči primere $1 < a$, $a = 1$, $0 < a < 1$, $a = 0$, $-1 < a < 0$, $a = -1$ ter $a < -1$.)

2. Določi vsa stekališča zaporedja $a_n = (-1)^n - 1$. Ali ima zaporedje limito?

3. Razišči omejenost, monotonost in konvergenco zaporedij, podanih s splošnim členom
   (a) $a_n = \frac{-n}{2n+1}$.
   Kateri je prvi člen zaporedja, ki je od limite oddaljen manj kot 1/10?
   (b) $b_n = \frac{3^n-9}{3^n+9}$.
   Kateri je prvi člen zaporedja, ki je od limite oddaljen manj kot 1/10?
   (c) $c_n = \frac{n^2+n}{n^2+1}$.
   Koliko členov zaporedja je od limite oddaljenih več kot 1/100 ?

4. Pokaži, da je zaporedje
$$a_n = \underbrace{\sin(\sin(\ldots(\sin}_{n} 1)))$$
monotono in omejeno. Izračunaj še njegovo limito.

5. Zaporedje a_n je podano rekurzivno:
$$\begin{aligned} a_1 &= 5 \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) \end{aligned}$$
   (a) Izračunaj vse kandidate za limito tega zaporedja.
   (b) Dokaži, da zaporedje a_n tudi dejansko ima limito. V ta namen dokaži omejenost in monotonost zaporedja. Za to lahko uporabiš tudi indukcijo.
   (c) Izračunaj limito zaporedja $\{a_n\}$.

6. Zaporedje $\{a_n\}$ je definirano z začetnim členom $a_1 = 2$ in rekurzivnim pravilom

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 3} \; .$$

   a) Pokaži, da velja $-1 \leq a_n \leq 2$ za vsako naravno število n.

   b) Pokaži, da je zaporedje padajoče.

   c) Dokaži, da je zaporedje konvergentno in izračunaj njegovo limito.

   d) Kako sta konvergenca in limita zaporedja odvisna od izbire začetnega člena a_1?

7. Dokaži, da je zaporedje, podano kot

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2} \\ a_{n+1} &= \sqrt{2 + a_n} \end{aligned}$$

konvergentno in izračunaj njegovo limito.

8. Dokaži, da je zaporedje, podano kot

$$\begin{aligned} a_1 &= -3 \\ a_{n+1} &= e^{a_n} - 1 \end{aligned}$$

konvergentno in izračunaj njegovo limito. Kaj pa če vzamemo za prvi člen zaporedja $a_1 = 3$?

9. Izračunaj naslednje limite zaporedij.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - n + 1}{-2n^2 + n - 3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3 - 2n} + \sqrt[3]{n^4 - 5n^2}}{\sqrt[4]{n^6 + n^5}}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4+1}} - n\sqrt{2}\right)$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2 + 2n}{n^2 + 1}\right)^n$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\log(n+1) - \log n\right)$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 - \dfrac{n}{n+1}\right)^{2n-1}$

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2 + 4n}{n^2 - n + 1}\right)^n$

l) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2 + 6}{2n^2 + 5}\right)^{4n^2+3}$

m) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 n +}}\right)$

n) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt{n+1}}{n-1}\right)^n$

10. Dokaži, da je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

11. Zaporedje naj bo podano s predpisom

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\,.$$

Določi limito tega zaporedja.

(Namig: uporabi izrek o sendviču.)