

Vaje Analiza I - 6. teden

1. Določite realni števili a in b tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1; & x \leq 1, \\ a(x^2 - 4x + 4) + 2a^{-1}; & 1 < x \leq 2, \\ bx^{-1}; & 2 < x \end{cases}$$

zvezna na celi realni osi. Nato skicirajte njen graf in določite vse ničle.

2. Ali lahko funkcijo

$$f(x) = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{x - \pi}$$

razširite tako, da bo zvezna na celotni realni osi?

3. Funkcijo

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\sin x}$$

razširite tako, da bo zvezna v okolici izhodišča koordinatnega sistema.

4. Naj bo funkcija f podana s predpisom

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{x^2}{x^2 - 4}\right).$$

- Določite njeno definicijsko območje. Kako je z njeno parnostjo? Določite ji tudi zalogo vrednosti.
 - Izračunajte leve in desne limite v točkah, kjer funkcija ni definirana.
 - Ali se da smiselno definirati funkcijske vrednosti v točkah, v katerih funkcija f ni definirana, tako, da bo dobljena funkcija zvezna?
 - Skicirjate graf zvezne razširitve funkcije f .
5. Preverite, da ima funkcija $f(x) = e^{-x} - x$ ničlo na intervalu $[0, 1]$. Ničlo nato z bisekcijo določite na eno decimalno mesto natančno.
6. Prepričajte se, da funkcija $f(x) = e^x + e^{2x}$ na intervalu $[0, 2]$ zavzame vrednost 6. Nato določite tisti x , pri katerem je ta vrednost dosežena.

7. Izračunajte naslednje limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1},$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{2x^2 + 5x + 3},$$

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{x^2 + \sin x}{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \sin x}{x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x (\log(x+1) - \log(x)),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1} \right)^x,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}.$$