

Vaje Analiza I - 7. teden

Naloga 1. Ali je funkcija $f(x) = x|x|$ odvedljiva na celotni realni osi?

Naloga 2. Ali je funkcija f zvezno odvedljiva povsod na \mathbb{R} ?

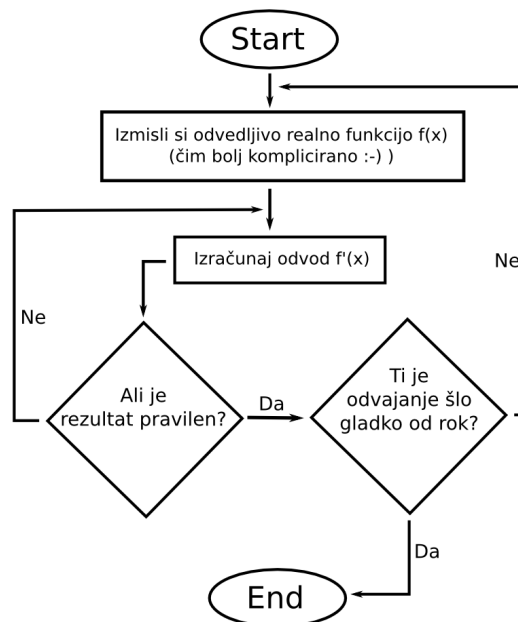
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - 1 & ; \quad x < 0 \\ \frac{\sqrt[3]{8x^3 - x^4}}{2} & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Naloga 3. Določi konstante a, b, c in d , tako da bo funkcija f odvedljiva na vsej realni osi.

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x^3 - 4x} & ; \quad |x| > 2 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & ; \quad \text{sicer} \end{cases}$$

Naloga 4. Ali lahko funkcijo $f(x) = x^2 \sin(1/x^3)$ dopolniš do funkcije, ki bi bila odvedljiva na vsem \mathbb{R} ?

Naloga 5.



Naloga 6. Odvajaj naslednji implicitno podani funkciji.

a) $e^{2y} - 2x - 1 = 0$

b) $3x^2y - y \log(x) + 5y^4 = \sin(xy)$

Naloga 7. S pomočjo logaritmiranja poišči odvode naslednjih funkcij.

$$\begin{array}{ll} a) & f(x) = x^x \\ b) & f(x) = x^{1/x} \\ c) & f(x) = \sin(x)^{\cos(x)} \\ d) & f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x \end{array}$$

Naloga 8. S pomočjo pravila za odvod inverza poišči odvoda funkcij $\operatorname{arcsh}(x)$ in $\operatorname{arcch}(x)$.

Naloga 9. Dokaži, da se funkciji $f(x) = \sin(\arccos(x))$ in $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ na preseku definicijskih območij razlikujeta le za konstanto in to konstanto tudi izračunaj.

Naloga 10. Dokaži, da se funkciji

$$f(x) = \arctan(x) \quad \text{in} \quad g(x) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

na vsakem povezanem kosu preseka definicijskih območij razlikujeta le za konstanto. Določi konstante (za vsak povezan kos posebej).

Naloga 11. Dokaži monotonost (in s tem tudi injektivnost) naslednjih dveh funkcij.

$$\begin{array}{ll} a) & f : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & f : x \longmapsto \tan(x) \\ b) & g : [-1/\log(2), \infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & g : x \longmapsto x2^x - 1 \end{array}$$

S pomočjo ugotovljenega argumentiraj obstoj in število rešitev enačb $\tan(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ in $x2^x = 1$.

Naloga 12. Pokaži, da velja $\arctan(x) < x$ za $x > 0$.

Naloga 13. Dokaži, da funkcija

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

ni odvedljiva v točki $x = 0$. Izračunaj tudi kot, ki ga v tej točki funkcija oklepa sama s sabo.

Naloga 14. Naj bo krivulja v ravnini podana z implicitno formulo

$$x^3 - 2x^2y^2 - 5x + y - 5 = 0 .$$

Izračunaj tangente in normale v točkah z x koordinato enako 3.

Naloga 15. Poišči tisto normalo na krivuljo $y = x \log(x)$, ki je pravokotna na premico z enačbo $2x - 2y - 3 = 0$.