

Vaje Analiza I - 13. teden

Naloga 1. Poišči splošne rešitve naslednjih linearnih diferencialnih enačb.

a) $y' + 2xy = e^{-x^2}$

b) $2xy' = y - x$

c) $x^2 y' = xy - y + \frac{1}{\sin x}$

d) $y' + \left(\frac{1}{x} + \tanh x\right) y = \frac{3x}{\cosh x}$

Naloga 2. Poišči rešitve naslednjih robnih problemov.

a) $y' + y^2 \sin(x) = 0, \quad y(0) = 0.$

b) $2xy' + y = x, \quad y(4) = 1.$

c) $(5x^2 + 1)y' - 20xy = 10x, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$

d) $y' \sin(y) = x \log(x), \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Naloga 3. Naj bo $f(x)$ tista rešitev diferencialne enačbe

$$y'(1 + 2e^x) = e^x y,$$

ki gre skozi točko $T(0, \sqrt{3})$. Poišči funkcijo f .

Naloga 4. Poišči diferencialno enačbo, katere rešitve so vse krožnice v ravnini.

Naloga 5. Poišči ortogonalne trajektorije na družino krožnic v centralni legi.

Naloga 6. Dana je družina parabol $y = ax^2$. Poišči ortogonalne trajektorije na to družino.

Naloga 7. Poišči krivuljo, ki gre skozi točko $(1, 1/3)$ in za katero je koeficient tangente v vsaki točki trikrat večji kot koeficient premice skozi to točko in izhodišče.

Naloga 8. Smerni koeficient tangente na krivuljo je v vsaki točki enak kvadratu ordinate te točke. Poišči vse krivulje, ki zadoščajo temu pogoju in nato med njimi izberi tisto, ki gre skozi točko $(-1, 1)$.

Naloga 9. V vsaki točki krivulje velja, da je projekcija odseka tangente v tej točki na ordinato enaka razliki med absciso in ordinato te točke. Med vsemi krivuljami s to lastnostjo poišči tisto, ki gre skozi točko $(2, 1)$.

Naloga 10. Na predavanjih ste omenili dva zakona širjenja informacij v zaprti skupini. Raši diferencialni enačbi, ki opisujeta širjenje informacij preko medijev in preko medsebojnega obveščanja in komentiraj rešitvi.

Naloga 11. Homogena veriga je položena na mizo tako, da nekoliko visi čez rob. Čez koliko časa bo padla na tla (predpostavljajoč da trenja ni)?

Naloga 12. Herlock Sholms pride na kraj zločina in izmeri, da je temperatura trupla 31°C . Čez eno uro spet izmeri temperaturo ohlajajočega se trupla, ki je takrat 28°C . V tem času se temperatura zraka ni spreminjala in je znašala 25°C . Herlock se je pri urah Fizike naučil, da je hitrost spreminjanja temperature premo sorazmerna s temperaturno razliko. Tako ima dovolj informacij, da lahko izračuna, kdaj se je umor zgodil. Poizkusi ponoviti njegov račun in ugotoviti čas umora.

Naloga 13. Valjasta posoda s površino osnovne ploskve A ima na dnu majhno odprtino s presekom σ . Po Torricellijevem principu je iztočna hitrost vode enaka $\sqrt{2gh}$. Čez koliko časa bo posoda, ki je bila na začetku napolnjena do višine h_0 , prazna?

Naloga 14. Posoda ima obliko narobe obrnjenega stožca z majhno odprtino s presekom σ na dnu. Čez koliko časa bo posoda, ki je bila na začetku napolnjena do višine h_0 , prazna?