Vaje Ana1uni – FRI

Prvič sestavljeno: 14. oktober 2006
Zadnji popravek 8. januar 2008

Opozorilo

Ti zapiski vsebujejo napake. Odkrivanje in odpravljanje le-teh je sestavni del učnega procesa.

Kazalo

1 Naravna, racionalna in realna števila

1.1 Enačbe in neenačbe z absolutno vrednostjo

Naloga 1.1.1. *Naslednje neenačbe reši analitično in grafično.*

1. $|x-2| \geq 3$
2. $||x|-1|+2 \geq x+5$
3. $||x-1|-1|+|x-2| < -1$:-)
4. $|x^2-3x-4| < 1$
5. $\left|\dfrac{x}{x+1}\right| > \dfrac{x}{x+1}$
6. $||x+1|-|x-1|| < 1$

Rešitev:
1. $|x-2| \geq 3$

I.	*II.*	
$x-2 \geq 0$	$x-2 < 0$	
$x \geq 2$	$x < 2$	*-pogoja*
$x-2 \geq 3$	$-(x-2) \geq 3$	
$x \geq 5$	$-x+2 \geq 3$	
	$-x \geq 1$	
	$x \leq -1$	*-rešitvi*

$$\text{I. } (x \geq 2) \cap (x \geq 5) \Rightarrow (x \geq 5)$$

$$\text{II. } (x < 2) \cap (x \leq -1) \Rightarrow (x \leq -1)$$

Rešitev:

$$(x \leq -1) \cup (x \geq 5)$$

2. $||x|-1|+2 \geq x+5$

I.	*II.*
$x \geq 0$	$x < 0$
$\|x-1\|+2 \geq x+5$	$\|-x-1\|+2 \geq x+5$

I. $|x-1|+2 \geq x+5$:

$$\begin{array}{cc} a) & b) \\ x-1 \geq 0 & x-1<0 \\ x \geq 1 & x<1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} x-1+2 \geq x+5 & -x+1+2 \geq x+5 \\ 1 \geq 5 & -x+3 \geq x+5 \\ \textit{ni rešitve} & -2x \geq 2 \\ & x \leq -1 \end{array}$$

II. $|-x-1|+2 \geq x+5$:

$$\begin{array}{cc} a) & b) \\ -x-1 \geq 0 & -x-1<0 \\ -x \geq 1 & -x<1 \\ x \leq -1 & x>-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} -x-1+2 \geq x+5 & x+1+2 \geq x+5 \\ -x+1 \geq x+5 & 3 \geq 5 \\ -2x \geq 4 & \textit{ni rešitve} \\ x \leq -2 & \end{array}$$

$$\text{Ia. } (x<1) \cap (x \leq -1) \Rightarrow (x \leq -1)$$

$$\text{IIb. } (x \leq -1) \cap (x \leq -2) \Rightarrow (x \leq -2)$$

Rešitev:

$$\text{I.} \cup \text{II.} \Rightarrow (x \leq -1)$$

3. $||x-1|-1|+|x-2|<-1$
Ta neenačba nima rešitve, saj nikoli ne velja $|a|<0$.
4. $|x^2-3x-4|<1$
Najprej izračunajmo korena enačbe x^2-3x-4:

$$D=9+16=25 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow x_1=4, x_2=-1$$

Ta par rešitev upoštevamo pri obeh vejah računanja absolutne vrednosti, saj se ne bo razlikoval od parov rešitev za $x^2-3x-4\geq 0$ in $x^2-3x-4<0$.

$$\begin{array}{cc}
I. & II. \\
x^2-3x-4\geq 0 & x^2-3x-4<0 \\
 & \\
x^2-3x-4<1 & -(x^2-3x-4)<1 \\
x^2-3x-5<0 & -x^2+3x+3<0 \\
(x-\frac{3+\sqrt{29}}{2})(x-\frac{3-\sqrt{29}}{2})<0 & (x-\frac{3+\sqrt{21}}{2})(x-\frac{3-\sqrt{21}}{2})>0
\end{array}$$

Poglejmo, kdaj funkcija x^2-3x-4 teče ali se dotakne $y=0$; na intervalu $(-\infty,-1]\cup[4,\infty)$. Hkrati moramo pogledati, kdaj teče funkcija x^2-3x-5 pod $y=0$; na intervalu $(\frac{3-\sqrt{29}}{2},\frac{3+\sqrt{29}}{2})$. Pri reševanju druge veje gledamo, kdaj velja $x^2-3x-4<0$. To je res za $(-1,4)$. Funkcija x^2-3x-3 pa teče nad 0 od $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$ do $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$.
Naredimo presek prve veje:

$$\big((-\infty,-1]\cup[4,\infty)\big)\cap(\frac{3-\sqrt{29}}{2},\frac{3+\sqrt{29}}{2})\Rightarrow(\frac{3-\sqrt{29}}{2},-1]\cup[4,\frac{3+\sqrt{29}}{2})$$

Presek druge veje:

$$(-1,4)\cap(\frac{3-\sqrt{21}}{2},\frac{3+\sqrt{21}}{2})\Rightarrow(-1,\frac{3-\sqrt{21}}{2})\cup(\frac{3+\sqrt{21}}{2},4)$$

Rešitev:

$$(\frac{3-\sqrt{29}}{2},\frac{3-\sqrt{21}}{2})\cup(\frac{3+\sqrt{21}}{2},\frac{3+\sqrt{29}}{2})$$

4. $\left|\frac{x}{x+1}\right|>\frac{x}{x+1}$

Vpeljimo novo spremenljivko $u=\frac{x}{x+1}$. Dobimo $|u|>u$. $|u|>u$ velja, kadar je u manjši od 0:

$$\frac{x}{x+1}<0$$

$$\begin{array}{cc}
I. & II. \\
(x<0)\wedge(x+1)>0 & (x>0)\wedge(x+1<0) \\
(x<0)\wedge(x>-1) & (x>0)\wedge(x<-1) \\
x\in(-1,0) & \textit{ni rešitve}
\end{array}$$

Rešitev:

$$x\in(-1,0)$$

5. $||x+1|-|x-1||<1$

$$\begin{array}{cc}
I. & II. \\
x+1\geq 0 & x+1<0 \\
|x+1-|x-1||<1 & |-x-1-|x-1||<1
\end{array}$$

I. $|x+1-|x-1|| < 1$:

$$\begin{array}{cc}
a) & b) \\
x-1 \geq 0 & x-1 < 0 \\
x \geq 1 & x < 1 \\
 & \\
|x+1-x+1| < 1 & |x+1+x-1| < 1 \\
2 < 1 & |2x| < 1 \\
\textit{ni rešitve} & |x| < \dfrac{1}{2}
\end{array}$$

II. $|-x-1-|x-1|| < 1$:

$$\begin{array}{cc}
a) & b) \\
x-1 \geq 0 & x-1 < 0 \\
x \geq 1 & x < 1 \\
 & \\
|-x-1-x+1| < 1 & |-x-1+x-1| < 1 \\
|-2x| < 1 & |-2| < 1 \\
|-x| < \dfrac{1}{2} & \textit{ni rešitve}
\end{array}$$

Rešitev:

$$x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

□

Naloga 1.1.2. *Narišite množice realne ravnine, ki jih določajo naslednje zveze.*

1. $|x| + |y| = 1$
2. $|x+y| + |x-y| \leq 2$
3. $(x^2 - y^2)(y+2) > 0$

Rešitev:
3. Vemo da je produkt dveh števil večji od 0, ko sta obe števili večji ali pa obe manjši od 0. Torej:

$$(x^2 - y^2) > 0, (y+2) > 0$$

in

$$(x^2 - y^2) < 0, (y+2) < 0$$

Rešitev prvega sistema je:

$$y > 2, x > 2$$

$$y > 2, x < 2$$

Rešitev drugega sistema je:

$$y < -2, x > 2$$
$$y < -2, x < 2$$

$\square$

1.2 Matematična indukcija

Naloga 1.2.1. *Naj bo* $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ *in* $n \in \mathbb{N}$. *S pomočjo matematične indukcije dokaži naslednjo resnico (ali znaš isto stvar dokazati še kako drugače?).*

$$(a-1) \mid a^n - 1$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

$\square$

Naloga 1.2.2. *S pomočjo matematične indukcije dokažite Bernoullijevo neenakost. Naj bo* $x > -1$ *realno in* n *naravno število.*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Rešitev:
Najprej baza indukcije. Vstavimo $n = 1$ in zapišemo jasno resnico:

$$1 + x \geq 1 + x.$$

Sedaj predpostavljajmo, da trditev velja za nek $n \in \mathbb{N}$ in jo poizkusimo dokazati še za $n+1$. Pri dokazovanju ključno uporabimo indukcijsko predpostavko ter dejstvo, da je n naravno število in x realno število ter zato produkt nx^2 ne more biti negativen.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \overset{I.P.}{\geq} (1+nx)(1+x) =$$
$$= 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + nx + x = 1 + (n+1)x$$

$\square$

Naloga 1.2.3. *Dokaži.*

$$\forall n \in \mathbb{N}: \qquad \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$

Rešitev:
Bazični korak: $k = 1$. Dobimo da je $\frac{1}{\sqrt{1}} \geq \sqrt{1}$.
Indukcijska pretpostavka :
za $n = k$, velja da

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{k}$$

Dokazati moramo še da neenakost velja tudi za $n = k + 1$. Vzamimo da je

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} = S(k)$$

Sklepamo:

$$S(k+1) = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = S(k) + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Dobimo:

$$S(k+1) = S(k) + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Zadošča dokazati, da velja

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \sqrt{k+1}$$

Malo preuredimo in dobimo naslednjo enčbo:

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \sqrt{k+1} \geq 0$$

oziroma

$$\frac{\sqrt{k(k+1)} + 1 - \sqrt{k+1}^2}{k+1} \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{k(k+1)} + 1 - k - 1}{k+1} \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{k(k+1)} - k}{k+1} \geq 0$$

kar je vedno res.
Torej velja

$$S(k+1) \geq \sqrt{k+1}$$

kar smo tudi hoteli dokazati.

$\square$

Naloga 1.2.4. *Dokaži, da n premic v splošni legi (nobeni dve nista vzporedni in nobene tri nimajo skupnega preseka) razdeli ravnino na $n(n+1)/2+1$ delov.*

Rešitev:
Bazični korak $n = 1$, imamo $\frac{1(1+1)}{2} + 1 = 2$ delov kar se sklada s skico. Sedaj pretpostavimo, da $n = k$ premic razdeli ravnino na

$$\frac{k(k+1)}{2} + 1$$

kosov. Če potegnemo še eno premico v ravnini $n = k + 1$, dobimo

$$\frac{k(k+1)}{2} + 1 + (k+1)$$

kosov. Če to malo preuredimo dobimo

$$\frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} + 1$$

oziroma

$$\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} + 1$$

S tem smo dokazali da da n premic v splošni legi (nobeni dve nista vzporedni in nobene tri nimajo skupnega preseka) razdeli ravnino na $\frac{k(k+1)}{2} + 1$ delov. □

Naloga 1.2.5. *Izpelji formulo za število diagonal konveksnega mnogokotnika in jo nato dokaži z matematično indukcijo.*

Rešitev:
Vzamimo nek mnogokotnik. Diagonalo lahko potegnemo do $(n-3)$ vozlišč. To lahko ponovimo n krat, za vsako vozlišce posebej. S tem smo vsako diagonalo potegnili dvakrat, zato je število diagonal konveksnega mnogokotnika enako

$$D = \frac{n(n-3)}{2}.$$

To tudi dokažemo z indukcijo.
Za $k = 4$, konveksni štirikotnik imamo

$$D = \frac{4(4-3)}{2} = 2$$

Pretpostavimo da za $n = k$ velja dana enačba: $D = \frac{k(k-3)}{2}$
Če vzamimo da je $n = k + 1$, dobimo

$$D = \frac{k(k-3)}{2} + (k-1)$$

Če to malo preuredimo, dobimo,

$$D = \frac{(k+1)((k+1)-3)}{2}$$

kar smo tudi morali dokazati. □

Naloga 1.2.6. *Ugani formulo za najmanjše število potez rešitve problema Hanojskih stolpičev*[1] *z n diski in tremi stolpci. Nato uganjeno formulo dokaži s pomočjo matematične indukcije,*

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi

Namig:

♠ V delu ♠

□

Naloga 1.2.7. *S pomočjo matematične indukcije dokaži, da so vsi konji na svetu enake barve.*

Namig:
Morda bo bolje razmisliti, zakaj se zgornje trditve ne da dokazati, tudi z matemetično indukcijo ne ... □

Naloga 1.2.8. *Dokaži, da je za vsako naravno število n število $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ deljivo z 133.*

Rešitev:
Če vzamemo da je $k = 1$, dobimo naslednjo enačbo: $11^{1+1} + 12^{2-1}$, ali $11^2 + 12^1 = 133$.
Pretpostavimo da je za $n = k$ število $11^{k+1} + 12^{2k-1}$ deljivo z 133.
Za $n = k + 1$ moramo dokazati, da je izraz $11^{(k+1)+1} + 12^{2(k+1)-1}$ deljiv z 133. Če to malo preuredimo, dobimo $11^{k+2} + 12^{2k+1}$, oziroma

$$11 \cdot 11^{k+1} + 144 \cdot 12^{2k-1}$$

$$11 \cdot (11^{k+1} + 12^{2k-1}) + 133 \cdot 12^{2k-1}$$

Od tukaj sledi, da je za vsako naravno število n število $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ deljivo z 133. □

Naloga 1.2.9. *Poišči polinom p tretje stopnje z ničelnim prostim členom, za katerega velja zveza*

$$p(x) - p(x-1) = x^2. \tag{1}$$

Nato s pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2. \tag{2}$$

Rešitev:
Polinom p zapišimo kot

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx.$$

Pri tem smo že upoštevali, da je prosti člen ničelen ($d = 0$). Sedaj poglejmo, kakšne pogoje povzroči zveza (1).

$$\begin{aligned} x^2 = p(x) - p(x-1) = ax^3 + bx^2 + cx - (a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1)) = \\ = a(3x^2 - 3x + 1) + b(2x - 1) + c = 3ax^2 + (-3a + 2b)x + (a - b + c) \end{aligned}$$

S primerjavo koeficientov pred posameznimi potencami na začetku in koncu računa ugotovimo naslednje vezi.

$$\begin{aligned} 3a &= 1 \\ -3a + 2b &= 0 \\ a - b + c &= 0 \end{aligned}$$

Dobljenih enačb ni prav nič težko rešiti.

$$a = \frac{1}{3} \qquad b = \frac{1}{2} \qquad c = \frac{1}{6}$$

Torej je iskani polinom oblike

$$p(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x.$$

Sedaj še s pomočjo matematične indukcije pokažimo, da velja lastnost (2). Najprej preverimo bazo indukcije. Za $n = 1$ dobimo

$$p(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1 = 1^2,$$

torej lastnost drži. Dokažimo še indukcijski korak. Predpostavimo, da trditev (2) drži za nek $n \in \mathbb{N}$, torej da velja trditev

$$p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2. \tag{3}$$

S tem privzetkom bi radi dokazali, da trditev drži tudi za naslednjika od n, torej za število $n+1$. Izračunamo torej, koliko je $p(n+1)$. Pri tem si pomagajmo z lastnostjo (1).

$$p(n+1) = p(n) + (n+1)^2 \overset{I.P.}{=} \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \sum_{i=1}^{n+1} i^2$$

S tem je trditev dokazana. $\square$

Naloga 1.2.10. *Dokaži, da za poljuben $n \in \mathbb{N}$ velja:*

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Namig: Očitno velja

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Poizkusi dokazati, da je desna stran večja ali enaka eni polovici. Seveda je potrebno tudi utemeljiti, zakaj je s tem originalna naloga dokazana.

Rešitev:
Desna stran v namigu je res strogo manjša od leve, saj je edina razlika med stranema ta, da je na desni izpuščen prvi (pozitivni!) člen. Če torej dokažemo, da je desna stran večja ali enaka eni polovici, bo takšna tudi leva stran.
Poizkusimo torej dokazati:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}.$$

Dela se lotimo z indukcijo. Najprej dokažemo *bazo indukcije:* $n = 1$. Hitro ugotovimo, da tukaj ni problemov. Res je

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

Nekoliko več dela bo z *indukcijskim korakom.* Predpostavljamo, da neenačba velja za neki $n \in \mathbb{N}$ in dokazujemo neenačbo za njegovega naslednjika:

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\geq\frac{1}{2}.$$

Za uporabo indukcijske predpostavke nam manjka en člen, namreč $1/(n+1)$. Zato ga umetno naredimo, tako da ga odštejemo in prištejemo v isti sapi. Dobimo neenačbo:

$$\underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{I.P.}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}\geq\frac{1}{2}.$$

V delu, označenem z *I.P.* opazimo vzorec, za katerega glede na indukcijsko predpostavko vemo, da je večji od $1/2$. Na levi celoten označen izraz nadomestimo z $1/2$ in s tem zmanjšamo njegovo vrednost. Če uspemo dokazati, da je novonastala leva stran še vedno večja od $1/2$, potem bo to še toliko bolj veljalo za prejšnjo (še večjo) levo stran neenačbe. Dokazujemo torej neenakost:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}\geq\frac{1}{2}.$$

To ni več težavno. Uredimo in postavimo na skupni imenovalec.

$$\frac{(n+1)(2n+2)+(2n+1)(n+1)-(2n+1)(2n+2)}{(2n+1)(2n+2)(n+1)}\geq 0$$

$$\frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)(n+1)}\geq 0$$

Zadnja vrstica je že več kot očitna (saj n izbiramo iz množice $\mathbb{N}$ in imamo ulomek s samimi pozitivnimi vrednostmi). S tem je indukcijski korak dokazan in tako tudi željena trditev.

$\square$

Naloga 1.2.11. *Koliko celih števil vsebuje zaprti interval $[a,b]$, kjer sta $a,b\in\mathbb{R}$? Kaj pa polodprti interval $[a,b)$ in odprti interval (a,b)? Iskane količine izrazi s funkcijama dno ($\lfloor x\rfloor$) in strop ($\lceil x\rceil$)*

Rešitev:
Zaprti interval $[a,b]$ kjer sta $a,b\in\mathbb{R}$ vsebuje $\lfloor b\rfloor-\lceil a\rceil+1$ celih števil, za vsak $a\leq b$.

Polodprti interval $[a,b)$ vsebuje $\lceil b\rceil-\lceil a\rceil$ celih stevil, za vsak $a\leq b$.

Odprti interval (a,b) vsebuje $\lceil b\rceil-\lfloor a\rfloor-1$ celih stevil, za vsak $a<b$. $\square$

Naloga 1.2.12. *Dokaži, da za vsako pozitivno realno število x veljata spodnji enačbi.*

$$\left\lceil\sqrt{\lceil x\rceil}\,\right\rceil=\lceil\sqrt{x}\rceil\qquad\text{in}\qquad\left\lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\,\right\rfloor=\lfloor\sqrt{x}\rfloor$$

Rešitev:
Dokazali bomo, da za vsako pozitivno realno število x velja:

$$\left\lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\,\right\rfloor=\lfloor\sqrt{x}\rfloor$$

Vzamimo da je $m=\left\lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\,\right\rfloor$. Torej je $m\leq\sqrt{\lfloor x\rfloor}<m+1$. Če neenakost kvadriramo (opravka imamo z nenegativnimi števili!) dobimo, da $m^2\leq\lfloor x\rfloor<(m+1)^2$. Tako smo se znebili kvadrata. Nadalnje, če upoštevamo

$$x<n\Leftrightarrow\lfloor x\rfloor<n$$

in

$$n \leq x \Leftrightarrow n \leq \lfloor x \rfloor$$

dobimo, da je $m^2 \leq x < (m+1)^2$. Če to neenačbo zdaj korenimo, dobimo, da je $m \leq \sqrt{x} < m+1$. Ker vemo, da je $\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1$, dobimo, da je $m = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$. Od tukaj sledi, da je

$$\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = m = \lfloor \sqrt{x} \rfloor,$$

kar smo tudi morali dokazati.
Podobno dokažemo še:

$$\left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$$

□

1.3 Podmnožice realnih števil

Naloga 1.3.1. *Razmisli o omejenosti in obstoju* max*,* min*,* inf *in* sup *za naslednje množice.*

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; \quad x > 0\}$$
$$\mathbb{R}_o^+ = \{x \in \mathbb{R}; \quad x \geq 0\}$$
$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}; \quad x < 0\}$$
$$\mathbb{R}_o^- = \{x \in \mathbb{R}; \quad x \leq 0\}$$
$$B = [0, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$$

Rešitev:
$\mathrm{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; \quad x > 0\}$ sledi da je min, max, sup ne obstajajo, inf je 0.
$\mathbb{R}_o^+ = \{x \in \mathbb{R}; \quad x \geq 0\}$ max, sup ne obstajata, min in inf sta 0.
$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}; \quad x < 0\}$ min, max, inf ne obstajajo, sup je 0.
$\mathbb{R}_o^- = \{x \in \mathbb{R}; \quad x \leq 0\}$ min, inf ne obstajata, max in sup sta 0.
$B = [0, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ je nova množica $S = [0, \sqrt{2})$. $\inf(S)$ in $\min(S)$ je 0, $\sup(S)$ je $\sqrt{2}$, $\max(S)$ ne obstaja. □

Naloga 1.3.2. *Določi* max*,* min*,* inf*,* sup*, stekališča in limito za zaporedje*

$$b_n = a^n$$

za dan $a \in \mathbb{R}$ in $n \geq 1$, v kolikor kaj od naštetega obstaja. Pri tem loči primere $a > 1$, $a = 1$, $0 < a < 1$, $a = 0$, $-1 < a < 0$, $a = -1$ ter $a < -1$.

Namig:
Nalogo bomo rešili za vsak primer posebej.
Če je $a > 1$, potem $b_n = a^n$ narašča, max, sup in limito ne obstajajo.min in inf je prvi element, b_1.
Za $a = 1$ in $a = 0$, je zaporedje konstantno, $b_n = 1$ oziroma $b_n = 0$.
Za $0 < a < 1$, min in max ne obstajata, inf $= 0$,sup $= 1$, in limito ko gre n proti neskončno je 0.

Za $-1 < a < 0$, min in max ne obstajata, inf $= -1$,sup $= 0$, in limito ko gre n proti neskončno je 0.
Za $a = -1$, zaporedje b_n ima samo dve vrednosti -1 in 1. min in inf je -1, max in sup je 1.
Če je $a < -1$ potem max, min, inf, sup, limito...ne obstajajo. □

Naloga 1.3.3. *Poišči* max, min, inf *in* sup *za množico*

$$A = \left\{ \frac{1}{n}; \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rešitev:
Hitro lahko ugotovimo, da je množica A omejena. Števila v njej so namreč strogo pozitivna in vedno manjša od npr. 2. Zato po izreku obstajata števili $\inf(A)$ in $\sup(A)$. Koliko pa sta? Vsi elementi so manjši ali enaki 1, zato je 1 maksimalni element množice A. Maksimalni element je, če obstaja, enak supremumu, zato zapišemo

$$\sup(A) = \max(A) = 1.$$

S spodnjo mejo je nekoliko drugače. Zaradi omejenosti A vemo, da $\inf(A)$ obstaja in z malo prakse lahko posumimo, da je to število 0. Sedaj pa to sumnjo še striktno dokažimo.

Najprej dokažimo, da 0 dejansko je spodnja meja za množico A. To je res, saj so v A samo pozitivna števila. Nekoliko zahtevnejše pa bo dokazati, da je 0 dejansko največja izmed spodnjih mej. Recimo, da ni. Potem obstaja spodnja meja za A, ki je večja od 0; recimo ji ε. Sedaj najdimo element množice A, ki je manjši od ε. S tem bomo zašli v protislovje (ker ε ne bo spodnja meja za A) in tako dokazali, da je bila predpostavka (obstaja spodnja meja za A, ki je večja od 0) napačna. Definirajmo

$$\delta = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil.$$

Jasno je $\delta \in \mathbb{N}$ (saj je otrok zaokrožanja) in zato je $1/\delta \in A$. Seveda pa je $1/\delta < \varepsilon$. Tako smo našli element množice A, ki je strogo manjši od ε. Torej ε ne more biti spodnja meja za A.

S tem smo videli, da je

$$\inf(A) = 0.$$

Kako pa je z minimumom množice A?. Če minimum obstaja, potem mora biti enak infimumu. Zato je edini kandidat za minimum število 0. Vendar 0 ni element množice A, zato ne more biti njen minimum. Torej lahko sklenemo, da $\square$

2 Zaporedja

2.1 Zaporedja z eksplicitno podanim splošnim členom

Naloga 2.1.1. *Razišči omejenost, monotonost in konvergenco zaporedja, podanega s splošnim členom*

$$a_n = \frac{-n}{2n+1}.$$

Koliko členov zaporedja je od limite oddaljenih več kot 1/1000 *?*

Rešitev:
Zapišimo prvih nekaj členov zaporedja:

$$-\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{7}, -\frac{4}{9}, \ldots$$

Raziščimo monotonost zaporedja:

$$\begin{aligned}
a_n &> a_{n+1} \\
-\frac{n}{2n+1} &> -\frac{n+1}{2(n+1)+1} \\
\frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} &> 0 \qquad\qquad /(2n+1)(2n+3) > 0 \\
(n+1)(2n+1) - n(2n+3) &> 0 \\
1 &> 0
\end{aligned}$$

Ker neenačba $1 > 0$ vedno velja, smo dokazali, da zaporedje monotono pada. Torej je tudi navzgor omejeno, naprimer kar z svojim prvim členom. Dokažimo, da je zaporedje omejeno tudi navzdol.

$$\begin{aligned}
a_n &> -1 \\
\frac{-n}{2n+1} &> -1 \\
\frac{-n+2n+1}{2n+1} &> 0 \\
\frac{n+1}{2n+1} &> 0
\end{aligned}$$

Zgornja neenačba vedno velja, torej je zaporedje omejeno navzdol. Limita zaporedja a_n je torej:

$$\lim a_n = -\frac{1}{2}$$

Izračunajmo še, koliko členov zaporedja je od limite oddaljenih za več kot $1/1000$:

$$\begin{aligned}
|a_n - a| &\geq \epsilon \\
\left|\frac{-n}{2n+1} + \frac{1}{2}\right| &\geq \frac{1}{1000} \\
\left|\frac{1}{4n+2}\right| &\geq \frac{1}{1000} \\
1000 &\geq 4n+2 \\
998 &\geq 4n \\
n &\leq 249.5
\end{aligned}$$

Od limite je za več kot $1/1000$ oddaljeno prvih 249 členov zaporedij. $\square$

Naloga 2.1.2. *Razišči omejenost, monotonost in konvergenco zaporedja, podanega s splošnim členom*

$$a_n = \frac{3^n - 9}{3^n + 9}.$$

Kateri je prvi člen zaporedja, ki je od limite oddaljen manj kot $1/10$ *?*

Rešitev:
Oglejmo si prvih par členov zaporedja.

$$-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{13}{14}, \frac{40}{41}, ...$$

Sklepamo, da je infimum zaporedja $-\frac{1}{2}$, za supremum in limito zaporedja pa posumimo, da sta enaka 1. To moramo še formalno dokazati. Najprej pokažimo, da zaporedje monotono narašča.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &> a_n \\
\frac{3^{n+1}-9}{3^{n+1}+9} &> \frac{3^n-9}{3^n+9} \qquad /(3^n+9)(3^{n+1}+9) > 0 \\
(3^{n+1}-9)(3^n+9) &> (3^n-9)(3^{n+1}-9) \\
3^n &> 0
\end{aligned}$$

Neenačba $3^n > 0$ je vedno resnična, zato zaporedje res monotono narašča. Dokažimo še, da je omejeno navzgor.

$$\begin{aligned}
a_n &< 1 \\
\frac{3^n-9}{3^n+9} &< 1 \\
3^n - 9 &< 3^n + 9 \\
-18 &< 0
\end{aligned}$$

Zaporedje je omejeno navzgor z 1. Izračunajmo, če je to tudi limita zaporedja:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{3^n-9}{3^n+9} = \\
&\qquad 3^n - 9 = u : n \to \infty \Rightarrow 3^n \to \infty \Rightarrow 3^n - 9 \to \infty \\
&= \lim_{u\to\infty} \frac{u}{u+18} = 1
\end{aligned}$$

Limita zaporedja je torej res enaka 1.
Kateri je torej prvi člen zaporedja, ki je od limite oddaljen manj kot $1/10$?

$$\begin{aligned}
\left|\frac{3^n-9}{3^n+9}-1\right| &< \frac{1}{10} \\
\left|\frac{-18}{3^n+9}\right| &< \frac{1}{10} \\
\frac{18}{3^n+9} &< \frac{1}{10} \\
3^n &> 171 \\
\log 3^n &> \log 171 \\
n \cdot \log 3 &> \log 171 \\
n &> 4.680...
\end{aligned}$$

Rešitev je peti člen. □

Naloga 2.1.3. *Razišči omejenost, monotonost in konvergenco zaporedja, podanega s splošnim členom*

$$a_n = \frac{n^2+n}{n^2+1}.$$

Koliko členov zaporedja je od limite oddaljenih več kot $1/100$ *?*

Rešitev:
Najprej izračunajmo limito, da dobimo predstavo o omejenosti zaporedja.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$$

Oglejmo si, kako se zaporedje obnaša.

$$1, \frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{20}{17}, ...$$

Zaporedje ne narašča monotono, saj sta njegov drugi in tretji člen enaka, po tretjem členu pa se nam zdi, da zaporedje pada. Nastavimo si neenačbo za nepadajoče zaporedje:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\geq a_n \\
\frac{(n+1)^2+n+1}{(n+1)^2+1} &\geq \frac{n^2+n}{n^2+1} \\
\frac{n^2+3n+2}{n^2+2n+2} &\geq \frac{n^2+n}{n^2+1} \qquad /(n^2+1)(n^2+2n+2) > 0 \\
(n-2)(n+1) &\leq 0
\end{aligned}$$

Rešitev neenačbe:

$$((n \geq -1) \wedge (n \leq 2)) \cap \mathbb{N} = \{1,2\}.$$

Zaporedje je torej nepadajoče le za prvi in drugi člen, od tretjega člena naprej pa zaporedje pada. Njegova limita je 1. Odgovorimo še na zadnje vprašanje.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n^2+n}{n^2+1} - 1\right| &\geq \frac{1}{100} \\
\left|\frac{n-1}{n^2+1}\right| &\geq \frac{1}{100} \\
n^2 - 100n + 101 &\leq 0 \\
\\
n_{1,2} &= \frac{100 \pm \sqrt{9596}}{2} \\
n_1 = 98.9795... \qquad & n_2 = 1.0205...
\end{aligned}$$

Pri vrednostih n_1 in n_2 doseže funkcija ničlo, mi pa moramo pogledati, kdaj teče pod ničlo. Rešitvi sta torej $n_1 = 98$ in $n_2 = 2$ ($n \in \mathbb{N}$). Členi n tečejo od 2 do 98, kar pomeni, da jih je vsega skupaj 97. Toliko členov je od limite oddaljeno za več kot $\frac{1}{100}$.

□

2.2 Rekurzivna zaporedja

Naloga 2.2.1. *Zaporedje $(a_n)_n$ je definirano z začetnim členom $a_1 = 2$ in rekurzivnim pravilom*

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 3} \, .$$

a) *Pokaži, da velja $a_n \geq -1$ za vsako naravno število n.*

b) *Pokaži, da je zaporedje padajoče.*

c) *Dokaži, da je zaporedje konvergentno in izračunaj njegovo limito.*

d) *Kako je konvergenca (in limita) zaporedja odvisna od izbire začetnega člena a_1?*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 2.2.2. *Dokaži, da je zaporedje, podano kot*

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{2} \\
a_{n+1} &= \sqrt{2 + a_n}
\end{aligned}$$

konvergentno in izračunaj njegovo limito.

Rešitev:
Za dokaz konvergence zaporedja je dovolj dokazati, da je zaporedje monotono in omejeno.

Preverimo najprej *omejenost.* Jasno je vedno $a_n > 0$, saj začnemo s pozitivnim številom, ki mu na vsakem koraku prištejemo nekaj pozitivnega. Posumimo tudi lahko, da velja $a_n < 2$. V to se prepričamo z indukcijo.

Bazični korak ni problematičen: $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Predpostavimo sedaj da za neki $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n < 2$ in poizkusimo isto neenakost dokazati tudi za njegovega naslednjika, a_{n+1}. Sklepamo:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \overset{I.P.}{<} \sqrt{2+2} = 2.$$

Zaporedje ima torej vse člene na intervalu $(0, 2)$. Nadalje si oglejmo monotonost. Dokažimo, da je zaporedje monotono naraščujoče, torej da je vsak naslednji člen večji od prejšnjega.

$$a_{n+1} > a_n$$

$$\sqrt{2 + a_n} > a_n$$

Neenačbo lahko legalno kvadriramo, saj je jasno, da imamo opravka samo s pozitivnimi količinami.

$$a_n^2 - a_n - 2 < 0$$

$$(a_n - 2)(a_n + 1) < 0$$

Neenačba je resnična za člene zaporedja, ki ležijo na intervalu $(-1, 2)$. Res so vsi členi znotraj tega intervala, kot smo se prepričali pri preiskovanju omejenosti. Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je torej monotono in omejeno, zato po znanem izreku ima limito.

Ostane nam le še, da to limito najdemo. Naj bo α iskana limita. Sklepamo:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2 + \lim_{n\to\infty} a_n}$$

Če v zgornjo enakost vstavimo α namesto $\lim a_n$, dobimo enačbo, ki je ni težko rešiti.

$$\alpha = \sqrt{2 + \alpha}$$

$$\alpha = 2$$

Izbrali smo edino smiselno rešitev ($\alpha = -1$ odpade, ker je zaporedje omejeno na interval $(0, 2)$, kot smo to že prej ugotovili). Za konec še jasno povejmo:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

□

Naloga 2.2.3. *Dokaži, da je zaporedje, podano kot*

$$a_1 = -3$$
$$a_{n+1} = e^{a_n} - 1$$

konvergentno in izračunaj njegovo limito. Kaj pa če vzamemo za prvi člen zaporedja $a_1 = 3$ *?*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 2.2.4. *Zaporedje a_n je podano rekurzivno:*

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) \end{aligned}$$

1. *Izračunaj vse možne limite tega zaporedja.*
2. *Dokaži, da zaporedje a_n tudi dejansko ima limito. V ta namen dokaži omejenost in monotonost zaporedja. Za to lahko uporabiš tudi indukcijo.*

Rešitev:
Dokaz je podoben kot tisti za prejšnje naloge. □

2.3 Limite zaporedij

Naloga 2.3.1. *Izračunaj naslednje limite zaporedij!*

1. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n}{n^2-n+1}\right)^n$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+}}\right)$$

3. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n-1}\right)^n$$

Rešitev 2.3.1.1:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2+4n}{n^2-n+1})^n = \lim_{n\to\infty}(\frac{n^2-n+1+5n-1}{n^2-n+1})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{5n-1}{n^2-n+1})^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{n^2-n+1}{5n-1}})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{n^2-n+1}{5n-1}})^{\frac{n^2-n+1}{5n-1}\cdot\frac{5n-1}{n^2-n+1}\cdot n} = \clubsuit$$

Ker velja $\frac{n^2-n+1}{5n-1} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ in je eksponentna funkcija zvezna, lahko sklenemo:

$$\clubsuit = e^{\lim \frac{5n-1}{n^2-n+1}\cdot n} = e^{\lim \frac{5n^2-n}{n^2-n+1}} = e^5.$$

□

Rešitev 2.3.1.2:
Naj bo $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ n-ti člen zaporedja, katerega limito iščemo. Poizkusimo najti konvergentni zaporedji $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ z isto limito, tako da bo za vsak $n \in \mathbb{N}$ bila izpolnjena neenačba $a_n \leq b_n \leq c_n$. Potem bo moralo tudi zaporedje b_n imeti isto limito.
Vsak člen zaporedja b_n je sestavljen kot vsota n ulomkov. Največji med njimi je prvi, najmanjši pa zadnji ulomek. Za zaporedje a_n vzamemo vsoto n najmanjših ulomkov in za zaporedje c_n vsoto n največjih.

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{n-\text{krat}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$c_n = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{n-\text{krat}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

Jasno je $a_n \leq b_n \leq c_n$ zaradi konstrukcije. Brez napora izračunamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 1.$$

Torej mora veljati tudi

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 1.$$

$\square$

Rešitev 2.3.1.3:
Najprej opazimo, da so vsi členi zaporedja pozitivni in izračunamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n-1} = 0.$$

Po definiciji limite to pomeni, da obstaja $N \in \mathbb{N}$, tako da je za vsak $n > N$ res $\frac{\sqrt{n+1}}{n-1} < \frac{1}{2}$. Potem je

$$\Big(\frac{\sqrt{n+1}}{n-1}\Big)^n < \big(\frac{1}{2}\big)^n$$

za vse $n > N$. Vendar je

$$\lim_{n\to\infty} \big(\frac{1}{2}\big)^n = 0,$$

zato mora biti tudi iskana limita enaka 0. $\square$

Naloga 2.3.2. *Dokaži, da je*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Rešitev:
Zadosti je pokazati, da razdalja med številom 1 in n-tim členom zaporedja konvergira k 0. Dokazali bomo, da je

$$\lim_{n\to\infty} \big(\sqrt[n]{n} - 1\big)^2 = 0.$$

To storimo s pomočjo ocene binomske vrste.

$$n = \left(1 + \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^k =$$
$$= 1 + \binom{n}{1}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) + \binom{n}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^3 + \cdots + \binom{n}{n}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$$

Ker so vsi členi v vsoti pozitivni, lahko ocenimo tretji sumand na sledeči način:

$$n > \binom{n}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2$$

Z nekoliko preurejanja dobimo naslednjo zvezo.

$$0 \leq \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 \leq \frac{2}{n-1} \xrightarrow{v\ limiti} 0$$

Izrek o "sendvič" limitah nam s tem pove, da srednji izraz konvergira k 0, kar dokaže trditev iz naloge. $\square$

Naloga 2.3.3. *Izračunaj naslednje limite zaporedij.*

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 - n + 1}{-2n^2 + n - 3}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$

$c)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $\qquad d)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

$e)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3 - 2n} + \sqrt[3]{n^4 - 5n^2}}{\sqrt[4]{n^6 + n^5}}$ $\qquad f)\ \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4+1}} - n\sqrt{2}\right)$

$g)\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ $\qquad h)\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 1}\right)^n$

$i)\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2 + 6}{2n^2 + 5}\right)^{4n^2+3}$ $\qquad j)\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(2 - \frac{n}{n+1}\right)^{2n-1}$

$k)\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 + 4n}{n^2 - n + 1}\right)^n$ $\qquad l)\ \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\log(n+1) - \log n\right)^n$

Rešitev:

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n + 1}{-2n^2 + n - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{-2 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} = -\frac{1}{2}$$

$$b)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^n = u : n \to \infty \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$$
$$= \lim_{u\to 0} \frac{2u + 3}{u + 1}$$
$$=3$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = 0$$

$$d)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n} = \qquad \sqrt[3]{n+1}=a;\ \sqrt[3]{n}=b$$

$$= \lim_{b^3\to\infty} (a-b)\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+ab+b^2} =$$

$$= \lim_{b^3\to\infty} \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{(n+1)^{\frac{2}{3}}+((n+1)\,n)^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}$$

$$=0$$

$$e)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3-2n}+\sqrt[3]{n^4-5n^2}}{\sqrt[4]{n^6+n^5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n-\frac{2}{n}}+n\sqrt[3]{n+\frac{5}{n}}}{n\sqrt[4]{n^2+n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}+n\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^4}}}{n\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}} = 0$$

$$f)\quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-n\sqrt{2}\right) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}-\sqrt{2}\right) \quad = \quad 0$$

$$g)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{(-n-1)\cdot\frac{1}{-n-1}\cdot n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n}{-n-1}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{-n-1}} = e^{-1}$$

$$h)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n-1}{n^2+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+1}{2n-1}}\right)^{n\cdot\frac{n^2+1}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} e^{n\cdot\frac{2n-1}{n^2+1}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{n^2+1}} = e^2$$

$$i)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+6}{2n^2+5}\right)^{4n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+5}\right)^{\left(2n^2+5\right)\cdot\frac{1}{2n^2+5}\cdot\left(4n^2+3\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{4n^2+3}{2n^2+5}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3}{2n^2+5}} = e^2$$

$$j)\ \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n}{n+1}\right)^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1-n}{n+1}\right)^{2n-1}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\cdot\frac{1}{n+1}\cdot(2n-1)}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{2n-1}{n+1}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}}=e^2$$

$$k)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n}{n^2-n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+1+5n-1}{n^2-n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5n-1}{n^2-n+1}\right)^{n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-n+1}{5n+1}}\right)^{n\cdot\frac{n^2-n+1}{5n-1}\cdot\frac{5n-1}{n^2-n+1}}=\lim_{n\to\infty}e^{n\frac{5n-1}{n^2-n+1}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-n}{n^2-n+1}}=e^5$$

$$l)\ \lim_{n\to\infty}n\cdot(\log(n+1)-\log n)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\log\frac{n+1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\log \mathrm{e}=1$$

□

2.4 Diferenčne enačbe

Naloga 2.4.1. *Poišči splošno formulo za Fibonaccijevo zaporedje, ki je podano rekurzivno s formulo*

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$

Rešitev:

$\spadesuit$ V delu $\spadesuit$

□

Naloga 2.4.2. *Katerim pogojem morajo zadoščati* a_0, a_1, *in* a_2, *da bo zaporedje, podano z rekurzivno formulo* $a_{n+3}=\frac{1}{2}a_{n+2}+a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n$ *konvergentno? Ali bo zaporedje konvergentno, če vzamemo* $a_0=2$, $a_1=4$, *in* $a_2=5$*?*

Rešitev:
Iskali bomo rešitve polinomske oblike, torej $a_n=x^n$. To vstavimo v rekurzivo pravilo, ki povezuje člen s svojimi tremi predhodniki, okrajšamo z najvišjo potenco in dobimo karakteristični polinom, iz katerega izbrskamo ničle.

$$x^3-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}=0$$

$$(x-1)(x+1)(2x-1)=0$$

Imamo torej tri realne rešitve $x_1=1$, $x_2=-1$ in $x_3=1/2$. Splošno eksplicitno rešitev sestavimo kot linearno kombinacijo dobljenih rešitev

$$a_n=A\cdot(1)^n+B\cdot(-1)^n+C\cdot(1/2)^n=A+B\cdot(-1)^n+C\cdot(1/2)^n,$$

kjer so A, B in C neka realna števila, odvisna od začetnih treh členov. Ali zaporedje a_n konvergira? V splošnem ne, saj je limita podzaporedja, sestavljenega iz lihih členov zaporedja a_n enaka $A - B$, limita zaporedja iz sodih členov pa je $A + B$. Torej mora biti, če želimo da a_n konvergira, B enak 0. V tem primeru imamo enotno limito, ki je enaka A. Kaj pa pogoj $B = 0$ pomeni za izbiro začetnih treh členov? Izrazimo prve tri člene z splošno rešitvijo (upoštevamo, da je $B = 0$).

$$a_0 = A + C$$

$$a_1 = A + \frac{C}{2}$$

$$a_2 = A + \frac{C}{4}$$

Imamo tri enačbe za dve neznanki, torej predoločen sistem. Najprej iz prvih dveh enačb izrazimo A in C.

$$A = 2a_1 - a_0 \text{ in } C = 2a_0 - 2a_1$$

To vpišemo v tretjo enačbo sistema in dobimo zvezo:

$$2a_2 - 3a_1 + a_0 = 0.$$

Zaporedje je torej konvergentno natanko tedaj, ko prvi trije členi zadoščajo tej zadnji zvezi.

S tem v mislih ni težko odgovoriti na drugo vprašanje. Predpisane tri člene vstavimo v pogoj za konvergenco in dobimo

$$2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 + 2 = 0$$

Začetna izbira členov $a_0 = 2$, $a_1 = 4$, in $a_2 = 5$ res določa konvergentno zaporedje. □

3 Osnovne lastnosti funkcij

3.1 Definicijska območja, zaloge vrednosti, sodost, lihost, periodičnost ipd.

Naloga 3.1.1. *Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti naslednjim funkcijam. Obravnavaj tudi njihovo sodost ter lihost in preglej injektivnost ter surjektivnost, če na funkcije gledaš kot na preslikave iz maksimalnega možnega realnega definicjskega območja v $\mathbb{R}$. Če se da, definiraj inverz in jasno napiši, med katerima množicama slika.*

1. $$f(x) = -2\log\frac{1+x}{1-x}$$

2. $$f(x) = \sqrt{2\log\frac{x+3}{2x-1}}$$

3. $$f(x) = \frac{3e^{-x}-1}{2}$$

4. $$f(x) = \sqrt{\sqrt{2x-1}-x}$$

5. $$f(x) = \sqrt{x^2}$$

6. $$f(x) = 3\log(1-x/2)$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 3.1.2. *Preveri lihost oziroma sodost naslednjih funkcij.*

1. $$f(x) = \sin(\cos(x))$$

2. $$f(x) = x\cos(x)$$

3. $$f(x) = \frac{1+\sin(x)}{x}$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 3.1.3. *S pomočjo zlepka zapiši funkcijo $g \circ f$. Določi tudi njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti.*

$$f(x) = \begin{cases} x - \pi/2 & ; \quad x < 0 \\ x - 1 & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x+5} & ; \quad x \geq -1 \\ \sin(2x + \pi/2) & ; \quad x < -1 \end{cases}$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 3.1.4. *Dokaži naslednji dve enakosti.*

$$a) \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad b) \quad \arctan(x) + \operatorname{arcctan}(x) = \frac{\pi}{2}$$

Rešitev:
a) Definicijsko območje funkcij arcsin in arccos je interval $\mathbb{I} = [-1, 1]$. Naj bo $x \in \mathbb{I}$. Potem obstaja natanko en $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tako da velja $x = \sin(y) = cos(\pi/2 - y)$ (druga enakost sledi iz znane povezave med trigonometričnimi funkcijami). Sedaj računamo z uporabo nove spremenljivke y.

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = arcsin(\sin(y)) + \arccos(\cos(\pi/2 - y)) = y + \pi/2 - y = \frac{\pi}{2}$$

b)

♠ V delu ♠

□

3.2 Zveznost funkcij

Naloga 3.2.1. *Določi konstanto a, tako da bo f zvezna funkcija.*

$$f(x) = \begin{cases} e^x & ; \quad x < 0 \\ a + x & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 3.2.2. *Izračunaj levo in desno limito v točki, kjer funkcija f ni zvezna.*

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 3.2.3. *Določi konstano a, tako da bo f zvezna funkcija.*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos^2(x-1)}{(\sqrt{x} - 1)^2} & ; \quad x > 1 \\ \dfrac{x^2 - ax}{x + a} & ; \quad x \leq 1 \end{cases}$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 3.2.4. *Spodaj podano delno funkcijo na linearen način dopolni do zveznosti na celotnem $\mathbb{R}$.*

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1}{x^2 - 4}\right) \qquad \text{za} \quad |x| > 2$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

3.3 Funkcijske enačbe

Naloga 3.3.1. *Določi funkcijo f, za katero velja*

$$f(x+1) = x^2 - 3x + 2.$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

3.4 Risanje funkcij

3.5 Limite funkcij

Naloga 3.5.1. *Izračunaj naslednje funkcijske limite.*

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x)}{\sqrt{x+1}-1}$

2) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{2x^2+5x+3}$

3) $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{x^2+\sin(x)}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)+\sin(x)}{x}$

5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$

7) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos(x/2)}{x-\pi}$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos(x)}}{\sin^2(x)}$

9) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$

10) $\lim\limits_{x\to 0} x\left(\log(x+1)-\log(x)\right)$

11) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\right)^{x}$

12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{\sin(x)}$

14) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos(x))^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$

15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}$

16) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\tan^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$

17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{\sin(x)}$

Rešitev:

1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(4x)\cdot 4x}{4x}}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(4x)}{4x}}{\frac{\sqrt{x+1}-1}{4x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sqrt{x+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \lim_{x\to 0}\frac{4x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1} = \lim_{x\to 0} 4(\sqrt{x+1}+1) = 8$$

2.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{2x^2+5x+3} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(2x+3)(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+1}{2x+3} = 3$$

3.

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{x^2+\sin(x)}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}$$

4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)+\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}+\frac{\sin(x)}{x} =$$
$$= 1+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}\cdot\frac{1+\cos(x)}{x} = 1+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x(\cos(x)+1)} = 1+\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x(\cos(x)+1)} = 1$$

5.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}(x+1)+x)(x-1)}{x-1} = 3$$

6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}-\sin(x)}{x^3} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)(1-\cos(x))}{x^2\cdot\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))}{x^2\cdot}\cdot\frac{(1+\cos(x))}{1+\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2\cos(x)(1+\cos(x))} = \frac{1}{2}$$

7.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos(x/2)}{x-\pi}$$

8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos(x)}}{\sin^2(x)}$$

9.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-2}{3}}\right)^{\frac{x^2-2}{3}\cdot\frac{3x^2}{x^2-2}} = e^3$$

10.

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\log(x+1)-\log(x)\right)$$

11.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-x-1}{2(x+1)}}\right)^{\frac{x^2-x-1}{2(x+1)}\cdot\frac{x\cdot 2(x+1)}{x^2-x-1}} = e^2$$

12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\frac{x\cdot\sin(x)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log(t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\log(t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\log(t+1)^{\frac{1}{t}}}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\log(e)}=1$$

14.

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos(x)\right)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$$

15.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}$$

16.

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\tan^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$$

□

3.6 Kompleksnejše naloge

Naloga 3.6.1. *Naj bo funkcija f podana s predpisom* $f(x)=\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{x^2}{x^2-4}\right)$.

a) *Določi njeno definicijsko območje in jo nariši. Kako je z njeno parnostjo (lihost/sodost)? Določi ji tudi zalogo vrednosti.*

b) *Poračunaj leve in desne limite v točkah, kjer funkcija ni definirana.*

c) *Ali se da smiselno definirati funkcijski vrednosti v točkah v katerih funkcija f ni efinirana, tako da bo dobljena funkcija zvezna. Če se da, to tudi stori.*

Naj bo funkcija g podana s predpisom $g(x)=\begin{cases} x+2; & x>0 \\ x-2; & x<0\end{cases}$ *in naj bo funkcija h enaka kompozitumu $f\circ g$.*

a) *Določi definicijsko območje funkcije h in jo nariši.*

b) *Ali se da funkcijo h razširiti do funkcije $\tilde{h}$, ki bi bila zvezna na celotni realni osi? Če se da, to tudi stori.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

4 Odvod in diferencial

4.1 Definicija odvoda

Naloga 4.1.1. *Ali je funkcija* $f(x) = x|x|$ *odvedljiva na celotni realni osi?*

Rešitev:

$$\spadesuit \qquad \text{V delu} \qquad \spadesuit$$

$\square$

Naloga 4.1.2. *Ali je funkcija* f *zvezno odvedljiva povsod na* $\mathbb{R}$*?*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} - 1 & ; \qquad x < 0 \\ \dfrac{\sqrt[3]{8x^3 - x^4}}{2} & ; \qquad x \geq 0 \end{cases}$$

Rešitev:

$$\spadesuit \qquad \text{V delu} \qquad \spadesuit$$

$\square$

4.2 Odvajalna praksa

Naloga 4.2.1. *Odvajaj naslednje funkcije.*

1.
$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^3(1+x)^3}$$

2.
$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

3.
$$f(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)}$$

4.
$$f(x) = x \cdot \arcsin\sqrt{\frac{x^2}{1+x}}$$

5.
$$f(x) = \log(\log^2(\log^3(x)))$$

6.
$$f(x)=\sqrt{x^2e^{-\frac{1}{x^2}})}$$

7.
$$f(x)=\frac{e^{\cos(x)}+2x^3-\sin(\log(1/x))+\sqrt{4x^2-x+1}}{2\cos(5x^4-1)\tan(e^x)}$$

8.
$$g(x)=3x\sin^5(x)\cos(x^3)+\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt[5]{x+e^{2x}}}\right)$$

Rešitev:

1. $f'(x)=\frac{(1-x)^3(1+x)^3-x(-3(1-x)^2(1+x)^3+3(1-x)^3(1+x)^2)}{(1-x)^6(1+x)^6}=\frac{(1+5x^2)}{(1-x)^4(1+x)^4}$
2. $f'(x)=\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}+x}}{8\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}+x}\sqrt{x+\sqrt{\sqrt{x}+x}}}$
3. $f'(x)=\frac{(\cos(x)-\sin(x))(\sin(x)-\cos(x))-(\cos(x)+\sin(x))(\sin(x)+\cos(x))}{(\sin(x)-\cos(x))^2})=-\frac{2}{1-\sin(2x)}$
4. $$f'(x)=\arcsin\sqrt{\frac{x^2}{1+x}}+x\frac{(x+2)}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x}}}$$
5. $$f'(x)=\frac{1}{\log^2(\log^3(x))}\cdot(\log^2(\log^3(x)))'$$
   Posebej odvajamo $(\log^2(\log^3(x)))'=\frac{1}{\log^3(x)}\cdot 2\log(\log^3(x))(\log^3(x))'$ in $(\log^3(x))'=3\frac{\log^2(x)}{x}$.
   Če vse to zmnožimo bomo dobili, da je $f'(x)=\frac{6}{x\log(x)\log(\log^3(x))}$

□

Naloga 4.2.2. *Odvajaj naslednje implicitno podane funkcije.*

1. $e^{2y}-2x-1=0$

2. $3x^2y-y\log(x)+5y^4=\sin(xy)$

Rešitev:

1. Z odvajanjem dobimo $2y'e^{2y}-2=0$, torej $y'=e^{-2y}$.
2. $y'=\frac{\cos(xy)-6xy+\frac{y}{x}}{3x^2-\log(x)+20y^3-\cos(xy)}$

□

Naloga 4.2.3. *S pomočjo logaritmiranja poišči odvode naslednjih funkcij.*

a)	$f(x) = x^x$	*b)*	$f(x) = x^{1/x}$
c)	$f(x) = \sin(x)^{\cos(x)}$	*d)*	$f(x) = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$

Rešitev:

a) Zapišemo $y = x^x$ in logaritmiramo enačbo: $\log(y) = x\log(x)$. Z implicitnom odvajanjem dobimo $\frac{y'}{y} = \log(x) + 1$, oziroma $y' = x^x(\log(x) + 1)$

c) $f(x) = \sin(x)^{\cos(x)}$, $y = \sin(x)^{\cos(x)}$. Odvajamo in dobimo,

$$\frac{y'}{y} = -\sin(x)\cdot\log(\sin(x)) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\sin(x)$$

oziroma

$$y' = \sin(x)^{\cos(x)}(-\sin(x)\log(\sin(x)) + \cot(x)\cos(x))$$

□

Naloga 4.2.4. *S pomočjo pravila za odvod inverza poišči odvoda funkcij* $\operatorname{arcsh}(x)$ *in* $\operatorname{arcch}(x)$*.*

Rešitev:
Za funkcijo f in njen inverz g velja $g(f(x)) = x$. Če to zvezo implicitno odvajamo po spremenljivki x, dobimo

$$\frac{dg}{dx}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

S pomočjo te zveze bomo izračunali odvod od $\operatorname{arcch}(x)$. Vstavimo $f(x) = \cosh(x)$ in računajmo.

$$\operatorname{arcch}'(\cosh(x)) = \frac{1}{\cosh'(x)} = \frac{1}{\sinh(x)}$$

Za vsak $y \geq 0$ obstaja natančno en $x \in [1, \infty)$, tako da velja $y = \cosh(x)$, zato lahko v račun uvedemo novo spremenljivko $y = \cosh(x)$ (in s tem $x = \operatorname{arcch}(y)$).

$$\operatorname{arcch}'(y) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{1}{\sinh(\operatorname{arcch}(y))}$$

Uporabimo še zvezo $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ in dobimo končni rezultat.

$$\operatorname{arcch}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \qquad \text{za} \quad y \geq 1$$

Podobno izračunamo

$$\operatorname{arcsh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} \qquad \text{za} \quad y \in \mathbb{R}.$$

□

4.3 Pomen odvoda

Naloga 4.3.1. *Dokaži, da se funkciji* $f(x) = \sin(\arccos(x))$ *in* $g(x) = \sqrt{1+x^2}$ *na preseku definicijskih območij razlikujeta le za konstanto in to konstanto tudi izračunaj.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 4.3.2. *Dokaži, da se funkciji*

$$f(x) = \arctan(x) \qquad \text{in} \qquad g(x) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

na vsakem povezanem kosu preseka definicijskih območij razlikujeta le za konstanto. Določi konstante (za vsak povezan kos posebej).

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 4.3.3. *Dokaži monotonost (in s tem tudi injektivnost) naslednjih dveh funkcij.*

a) $f : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : x \longmapsto \tan(x)$

b) $g : [-1/\log(2), \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : x \longmapsto x2^x - 1$

S pomočjo ugotovljenega argumentiraj obstoj in število rešitev enačb $\tan(x) = a, \quad a \in \mathbb{R}$ *in* $x2^x = 1$.

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 4.3.4. *Pokaži, da velja* $\arctan(x) < x$ *za* $x > 0$.

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 4.3.5. *Dokaži, da funkcija*

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

ni odvedljiva v točki $x = 0$. Izračunaj tudi kot, ki ga v tej točki funkcija oklepa sama s sabo.

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 4.3.6. *Naj bo krivulja v ravnini podana z implicitno formulo $x^3 - 2x^2y^2 - 5x + y - 5 = 0$. Izračunaj tangente in normale v točkah z x koordinato enako 3.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 4.3.7. *Poišči tisto normalo na krivuljo $y = x\log(x)$, ki je pravokotna na premico z enačbo $2x - 2y - 3 = 0$.*

Rešitev:
Izračunamo smerni koeficient premice:

$$\begin{aligned} 2x - 2y - 3 &= 0 \\ -2y &= -2x + 3 \\ y &= x - \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Smerni koeficient premice je $k = 1$. Zdaj moramo najti tangento na krivuljo $y = x\log(x)$, ki bo imela enak smerni koeficient, kot premica (tangenta in premica morata biti vzporedni).

Odvod krivulje: $y = x\log(x)$

$$\begin{aligned} y' &= 1\log(x) + x\tfrac{1}{x} \\ y' &= \log(x) + 1 \\ \\ y' &= 1 \\ \\ 1 &= \log(x) + 1 \\ \log(x) &= 0 \\ n^0 &= x \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Imamo x kooridinato katere se dotika tangenta, izračunajmo še y:

$$y = 1\log(1) = 0$$

Da bi lahko izračunali enačbo normale, potrebujemo njen smerni koeficient, ki pa je nasproten in braten smernemu koeficientu premice in/ali tangente na krivuljo:

$$k = -1$$

Enačba normale:

$$\begin{aligned} y &= kx + n \\ 0 &= -1 + n \\ n &= 1 \\ y &= -x + 1 \end{aligned}$$

□

Naloga 4.3.8. *V kateri točki in pod kakšnim kotom se sekata tangenta pri $x = 1$ in normala pri $x = 2$ na parabolo $x^2 + 1$?*

Rešitev:
Najprej izračunamo točki y v $x = 1$ in $x = 2$:

$$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 2$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 5$$

Odvod parabole:

$$y' = 2x$$

Zdaj izračunamo tangento v x_1 in normalo v x_2:

$$\begin{array}{rl|rl} x_1 & = 1 & x_2 & = 2 \\ k_t & = 2 & k_t & = 4 \\ & & k_n & = -\frac{1}{4} \\ & & & \\ y & = kx + n & y & = kx + n \\ 2 & = 2 * 1 + n & 5 & = 2 * (-\frac{1}{4}) + n \\ n & = 0 & n & = \frac{11}{2} \\ & & & \\ y_t & = 2x & y_n & = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{2} \end{array}$$

Poiščemo presečišče normale in tangente:

$$\begin{aligned} y_t &= y_n \\ 2x &= -\tfrac{1}{4}x + \tfrac{11}{2} \\ 8x &= -x + 22 \\ 9x &= 22 \\ x &= \tfrac{22}{9} \\ \\ y &= \tfrac{44}{9} \end{aligned}$$

Premici se sekata v točki $T_0(\frac{22}{9}, \frac{44}{9})$.

Izračunamo še kot pod katerim se sekata tangenta in normala:

$$\begin{aligned}
\tan\varphi &= \left|\tfrac{k_n - k_t}{1 + k_n k_t}\right| \\
\tan\varphi &= \left|\tfrac{-\frac{9}{4}}{\frac{1}{2}}\right| \\
\tan\varphi &= \tfrac{9}{2} \\
\varphi &= 77.47
\end{aligned}$$

□

Naloga 4.3.9. *Krivulja v ravnini, podana z enačbo $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ se imenuje astroida. Nariši jo in se prepričaj, od kod njeno ime. Pokaži, da je dolžina odseka tangente na astroido med koordinatnima osema konstantna.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 4.3.10. *Naj bo z enačbo $5x^2 - 8xy + 5y^2 = 1$ implicitno podana funkcija $y(x)$.*

a) *Zapiši enačbi tangent na graf krivulje v obeh točkah, kjer je $x = 0$.*

b) *Za katere vrednosti x je naklon tangente enak $k = \frac{1}{2}$?*

Rešitev:
a) Pri x=0 ima funkcija y(x) dve vrednosti:

$$\begin{aligned}
x &= 0 \\
0 - 0 + 5y^2 &= 1 \\
y^2 &= \tfrac{1}{5} \\
y &= \pm\sqrt{\tfrac{1}{5}} = \pm\tfrac{\sqrt{5}}{5}
\end{aligned}$$

Odvajajmo:

$$\begin{aligned}
5 \cdot 2x - 8(xy)' + 5 \cdot 2yy' = 0 \\
10x - 8y - 8xy' + 10yy' = 0 \\
-8xy' + 10yy' = -10x + 8y \\
y'(10y - 8x) = -10x + 8y \\
y' = \frac{-10x + 8y}{10y - 8x}
\end{aligned}$$

Odvod funkcije v točki 0 je enak koeficientu tangente na to funkcijo:

$$f'(0) = \frac{8y}{10y} = \frac{8}{10} = k$$

Zapišimo še enačbo za tangento in poračunajmo:

$$\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{8}{10} \cdot 0 + n$$
$$n_1 = \frac{\sqrt{5}}{5} \to n_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$y_1 = \frac{8}{10}x + \frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$y_2 = \frac{8}{10}x - \frac{-\sqrt{5}}{5}$$

b)

$$k = \frac{1}{2}$$
$$y = \frac{1}{2}x + n$$
$$\frac{-10x + 8y}{10y - 8x} = \frac{1}{2}$$
$$2 = \frac{10y - 8x}{-10x + 8y}$$
$$-20x + 16y = 10y - 8x$$
$$6y = 12x$$
$$y = 2x$$

□

Naloga 4.3.11. *Funkciji $f(x) = a(x^2 - 1)$ določi parameter a tako, da bosta tangenti na graf v presečiščih z abscisno osjo med seboj pravokotni.*

Rešitev:
Enačbo premice lahko prepišemo v $y = ax^2 - a$ in izračunamo njen odvod $y' = 2ax$. Nato izračunamo presečišči funkcije z abscisno osjo...

$$\begin{aligned} 0 &= a(x^2 - 1) \\ 0 &= x^2 - 1 \\ 1 &= x^2 \end{aligned}$$

...iz česar sledi, da funkcija seka os x pri $x_1 = -1$ in $x_2 = 1$. V teh dveh točkah sta koeficienta tangent enaka $k_1 = -2a$ in $k_2 = 2a$. Tangenti oklepata pravi kot, zatorej sta koeficienta tangent v odnosu, ki ga opisuje enačba:

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

Ko tako vstavljamo, dobimo:

$$\begin{aligned} -2a &= -\frac{1}{2a} \\ 4a^2 &= 1 \\ a^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

...iz česar sledi, da sta $a_1 = \frac{1}{2}$ in $a_2 = -\frac{1}{2}$. $\square$

Naloga 4.3.12. *Določi intervale konveksnosti in konkavnosti za naslednji funkciji.*

$a)\quad f(x) = xe^{-x} \qquad\qquad b)\quad g(x) = x^2 \log(x)$

Rešitev:
Dana funkcija je konkavna na danem intervalu, če za vsak x element intervala $f''(x) < 0$. Zato dano funkcijo odvajamo dvakrat in poiščemo, za katere x je pogoj izpolnjen.

$a)\quad f''(x) = (x-2)e^{-x} \qquad\qquad b)\quad g''(x) = 3 + 2\log(x)$

Sledi da je funkcija $f(x) = xe^{-x}$ konkavna na intervalu $x \in (2, \infty)$ in konveksna za $x \in (-\infty, 2)$
Sledi da je funkcija $g(x) = x^2 \log(x)$ konkavna na intervalu $x \in (e^{-\frac{3}{2}}, \infty)$ in konveksna za $x \in (0, e^{-\frac{3}{2}})$

$\square$

Naloga 4.3.13. *S pomočjo odvodov pokaži, da se krožnica s središčem v koordinatnem izhodišču in premica čez koordinatno izhodišče vedno sekata pod pravim kotom.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

$\square$

4.4 Diferencial

Naloga 4.4.1. *S pomočjo diferenciala približno izračunaj naslednje vrednosti.*

$a)\quad \sqrt{4.001}$	$b)\quad \sqrt[3]{7}$	$c)\quad sqrt[4]0.9996$
$d)\quad \log(1.02)$	$e)\quad \arctan(0.997)$	$f)\quad \sinh(0.001)$

Rešitev:

♠ V delu ♠

$\square$

4.5 Rollejev in Lagrangeov izrek

Naloga 4.5.1. *Funkcija* $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ *ima v krajiščih intervala* $[-2, 2]$ *enake vrednosti. Ali zadošča pogojem Rollejevega izreka? Če zadošča, poišči točko,* x_0*, kjer je* $f'(x_0) = 0$.

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 4.5.2. *S pomočjo Lagrangejevega izreka izračunaj naslednjo limito.*

$$\lim_{x\to\infty} \left(\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x}\right)$$

Rešitev:
Lagrangev izrek pravi, da je odvod funkcije v neki točki ξ kvocient razlike funkcijskih vrednosti točk a in b, ki sta levo in desno od ξ in razlike vrednosti teh dveh točk (funkcija mora biti odvedljiva na intervalu $[a, b]$):

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{4}$$

Zgornjo enačbo lahko izrazimo z Lagrangevim izrekom takle:

$$\begin{aligned}
b &= x + 1 \\
a &= x \\
cos\sqrt{x} &= f(x) \\
f'(x) = -sin\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} &= -\frac{sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \\
f'(\xi) &= -\frac{sin\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}} \\
\lim_{\xi\to\infty} \left(-\frac{sin\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}}\right) &= 0
\end{aligned}$$

□

4.6 L'Hospitalovo pravilo

Naloga 4.6.1. *Izračunaj naslednje limite.*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(2x)}{x + \sin(3x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x + 1 - \sin(x^2 - 1)}{x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} (\pi/2 - x)\tan(x)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^3 - x + 1)}{\log(x^5 + 5x + 1)}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

Rešitev:

$$a) - \frac{1}{4} \qquad b) 1$$
$$c) \qquad d) 1$$
$$e) \frac{3}{5} \qquad f) e^{-\frac{2}{\pi}}$$

□

4.7 Ekstremi funkcije ene spremenljivke

Naloga 4.7.1. *Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije* $f(x) = x^3 - 3x + 3$ *na intervalu* $[-3/2, 5/2]$.

Rešitev:
Največja in najmanjša vrednost funkcije se lahko pojavi v lokalnih ekstremih ali pa na robovih definicijskega območja funkcije.
Oglejmo si najprej lokalne ekstreme, torej točke, v katerih je tangenta na graf vodoravna ($k_t = 0$) in je torej odvod funkcije enak 0. Izračunamo odvod...

$$y' = 3x^2 - 3$$

...in pogledamo za katere vrednosti x je enak 0...

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 3 \\ 3x^2 &= 3 \\ x^2 &= 1 \end{aligned}$$

...iz česar dobimo dve rešitvi: $x_1 = 1$ in $x_2 = -1$. Pri x_1 in x_2 ima funkcija lokalna ekstrema in funkcijski vrednosti v teh dveh točkah sta:

$$f(x_1) = 1^3 - 3 * 1 + 3 = 1$$

in

$$f(x_2) = (-1)^3 - 3 * (-1) + 3 = 5$$

Največje oz. najmanjše vrednosti funkcije pa se lahko pojavljajo poleg v lokalnih ekstremih tudi na krajiščih intervala. Nam podani interval je $[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ in funkcijski vrednosti v krajiščih intervala sta:

$$f(-\frac{3}{2}) = (-\frac{3}{2})^3 - 3 * (-\frac{3}{2}) + 3 = \frac{33}{8} = 4\frac{1}{8}$$

in

$$f(\frac{5}{2}) = (\frac{5}{2})^3 - 3 * \frac{5}{2}) + 3 = \frac{89}{8} = 11\frac{1}{8}$$

Kot vidimo je funkcijska vrednost v enem izmed krajišč intervala večja kot v lokalnih ekstremih, torej sta največja in najmanjša vrednost dane funkcije na danem intervalu v točkah $x_g = 1$ in $x_G = \frac{5}{2}$, kjer indeksa G in g označujeta, da gre za globalni maksimum oziroma minimum.
Ker je odvod funkcije f povsod definiran, smo z zgornjim pregledom zaobjeli vse možnosti. □

Naloga 4.7.2. *Določi ekstreme funkcije* $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

Rešitev:

♠ V delu ♠

$\square$

Naloga 4.7.3. *Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije na danem intervalu:*

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, \qquad [-1, 5]$$

Rešitev:
Odvajamo našo funkcijo po x, in dobimo, da $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$. Točka kandidat za lokalni ekstrem je $x \in [-1, 5]$ za kateri velja $f'(x) = 0$. Rešujemo enačbo $f'(x) = 0$ in dobimo da edini kandidat za lokalni ekstrem je $x = 1$.

$$\begin{array}{ll} a) & f(-1) = 14 \\ b) & f(1) = -6 \\ c) & f(5) = 266 \end{array}$$

Sledi da na danem intervalu, najmanjšo vrednost funkcije je -6 in največjo 266, za $x = 1$ oziroma $x = 5$. $\square$

Naloga 4.7.4. *Določite koeficienta p in q tako da bo imela funkcija*

$$f(x) = x + \log(x^2 + px + q)$$

stacionarni tocki pri $x = 1$ in $x = 2$

Rešitev:
Stacionarno točko dobimo, če je $f'(x) = 0$. Odvajamo in dobimo, da je

$$f'(x) = 1 + \frac{2x + p}{x^2 + px + q}$$

Torej mora veljati $x^2 + (p+2)x + p + q = 0$. Če vstavimo da je $x = 1$ in $x = 2$ dobimo sistem enačb:

$$2p + q = -3$$

$$3p + q = -8$$

Rešitev sistema je $p = -5$ in $q = 7$. $\square$

4.8 Risanje funkcij II

Naloga 4.8.1. *Nariši naslednje funkcije. V ta namen jim določi definicijsko območje, ničle, pole, asimptote in stacionarne točke ter njihov tip.*

a) $f(x) = \dfrac{2-x^2}{1+x^4}$ *b)* $g(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

c) $h(x) = x\log(x)$ *d)* $\zeta(x) = x + e^{-x}$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

4.9 Optimizacijske naloge

Naloga 4.9.1. *Poišči tiste točke na grafu funkcije* $f(x) = \frac{1}{x^2}$*, v katerih je dolžina odseka tangente med koordinatnima osema najmanjša.*

Rešitev:
Predpostavimo, da obstaja nek x_0, v katerem je dolžina tangente, ki jo odsekata osi najmanjša. Pri x_0 je $f(x_0) = y_0 = \frac{1}{x_0^2}$. Pri x_0 izračunamo odvod funkcije, ki je enak mernemu koeficientu tangente...

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

$$f'(x_0) = -\frac{2}{x_0^3} = k_t$$

Vse tri vrednosti, x_0, y_0 in k_t vstavimo v splošno enačbo za premice...

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k_t(x - x_0) \\ y &= k_t * x - k_t * x_0 + y_0 \\ y &= -\frac{2x}{x_0^3} + \frac{2}{x_0^2} + \frac{1}{x_0^2} = -\frac{2x}{x_0^3} + \frac{3}{x_0^2} \end{aligned}$$

Dobljeno enačbo tangente prepišemo v odsekovno obliko...

$$\frac{y}{\frac{3}{x_0^2}} + \frac{x}{\frac{3x_0}{2}} = 1$$

...iz katere razberemo, da tangenta seka os x pri $a = \frac{3x_0}{2}$ in os y pri $b = \frac{3}{x_0^2}$. Kar nam ostane je, da po Pitagorovem izreku izračunamo dolžino hipotenuze (=odseka tangente).

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = (\frac{3x_0}{2})^2 + (\frac{3}{x_0^2})^2$$

$$c^2 = \frac{9}{x^4} + \frac{9x^2}{4} = d(x)$$

Minimum dobimo tako, da dobljeno funkcijo $d(x)$ odvajamo in pogledamo, kje je odvod enak 0. To, a operiramo s kvadratom dolžine namesto z dolžino samo, ne igra velike vloge, saj je dolžina pravtako najmanjša takrat, ko je kvadrat dolžine najmanjši.

$$\begin{aligned} d'(x) &= \frac{-36}{x^5} + \frac{18x}{4} = \frac{-72+9x^6}{2x^5} \\ 0 &= -72+9x^6 \\ 9x^6 &= 72 \\ x^6 &= 8 \\ x^2 &= 2 \end{aligned}$$

...iz česar sledi da sta možna rezultata $x_1 = \sqrt{2}$ in $x_2 = -\sqrt{2}$. V točkah s tema abscisama pa je tangenta na funkcijo, odsekana pri oseh, res najkrajša. □

Naloga 4.9.2. *V elipso* $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$ *včrtajte pravokotnik zs stranicama vzporednima osema elipse, tako da bo njegova ploščina največja.*

Rešitev:
Ploščino pravokotnika izračunamo po formuli $P = 2x \cdot 2y$, kjer so x in y pozitivna števila. Če malo preuredimo enačbo za elipso bomo dobili da je

$$y = \pm b\sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2})}$$

ali zato ker je y pozitivno število bomo vzeli da je $y = b\sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2})}$. Dobimo da je

$$P = 4bx\sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2})}$$

Ploščina je največja ko je $P' = 0$. Če odvajamo po x dobimo $P'(x) = 4b\sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2})} + 4bx\frac{\frac{1}{2}(-\frac{2x}{a^2})}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = 0$. Ko to malo preuredimo, dobimo $a^2 - 2x^2 = 0$. Sledi da pravokotnik bo imel največjo ploščino za $x = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ in $y = \frac{\sqrt{2}b}{2}$ □

Naloga 4.9.3. *Med vsemi enakokrakimi trikotniki z danim obsegom O, poiščite tistega, ki ima največjo ploščino.*

Rešitev:
Naj bo a osnovo trikotnika, in b dolzino krake. Potem imamo da $O = a + 2b$, ali $a = O - 2b$. Ploščina enakokrakega trikotnika je dana z formulo

$$P = \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$$

oziroma

$$P = \frac{1}{2}(O-2b)\sqrt{b^2 - \frac{(O-2b)^2}{4}}$$

Trikotnik ima največjo plosčino če je $P' = 0$. Odvajamo po b in dobimo

$$P'(b) = \frac{O(O-2b)}{4\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}(O-2b)^2}} - \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}(O-2b)^2}$$

Poiščimo b za katerim velja da je $P'(b) = 0$, oziroma $\frac{O(O-2b)-4(b^2-\frac{(O-2b)^2}{4})}{4\sqrt{b^2-\frac{(O-2b)^2}{4}}} = 0$. Dobimo da je $b = \frac{O}{3}$, sledi da je tudi $a = \frac{O}{3}$. Sledi da je ploščina največja za enekostranični trikotnik. □

Naloga 4.9.4. *Pred visokim zidom ($x = 0$) stoji parabolična ovira, ki jo opisuje enačba $y = 3 - x^2/4$ (glej skico). Določi dolžino najkrajše lestve, s katero še lahko dosežemo zid.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 4.9.5. *V pravokotni trikotnik včrtamo pravokotnik tako, da ena njegova stranica leži na hipotenuzi. Določi razmerje stranic pravokotnika, tako da bo njegova ploščina največja.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 4.9.6. *Dana je krivulja $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Med vsemi pravokotniki, ki imajo po dva oglišča na krivulji in dva na njeni asimptoti poišči tistega, ki ima največjo ploščino.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 4.9.7. *V polkrog včrtamo pravokotnik tako, da leži ena njegova stranica na premeru polkroga. Kakšno mora biti razmerje med stranicama pravokotnika, da bo njegova ploščina čimvečja?*

Rešitev:
Naj bo R polmer polkroga in x izbrana dolžina stranice pravokotnika, ki leži na premeru polkroga. Potem mora biti druga stranica pravokotnika velika ravno $y = \sqrt{R^2 - (x/2)^2}$. Torej lahko zapišemo funkcijo S, ki nam bo izračunala ploščino včrtanega pravokotnika kot

$$S(x) = x \cdot y = x\sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

Lokalne ekstreme te funkcije določimo z odvajanjem.

$$S'(x) = \sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} - \frac{x^2}{4\sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{2R^2 - x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$$

Sedaj poiščemo ničle odvoda, torej rešimo enačbo $S'(x) = 0$. Ker nas rešitev $x = 2R$ ne zanima (pripadajoča ploščina je ničelna, torej očitno ni maksimalna mogoča), lahko predpostavimo, da imenovalec ulomka ni ničelen in poiščemo le ničle števca. Dobimo naslednji rešitvi.

$$x_{1,2} = \pm R\sqrt{2}$$

Seveda negativna dolžina ni smiselna. Ali je dobljena dolžina res lokalni maksimum? V to se lahko prepričamo s pomočjo drugega odvoda. Izračunamo lahko , da je $S''(R\sqrt{2}) = -2$, zato je dobljeni lokalni ekstrem res maksimum. □

Naloga 4.9.8. *Tovarna izdeluje konzerve v obliki pokončnega krožnega valja. Volumen konzerv je v naprej določen. Kakšno mora biti razmerje med polmerom in višino valja, da bo poraba pločevine kar najmanjša.*

Rešitev:
Optimizirati je potrebno površino konzerve, in sicer glede na razmerje med njeno višino in polmerom. Naj bo v višina konzerve, R polmer osnovne ploskve in V njen predpisani volumen. Izrazimo Površino konzerve kot funkcijo njene višine, volumna in polmera osnovne ploskve.

$$S(R, v) = 2\pi R^2 + 2\pi R v = 2\left(\pi R^2 + \frac{2V}{R}\right).$$

Tu smo upoštevali, da se volumen valja izračuna kot $V = \pi R^2 v$. Odvajajmo zgornjo enačbo po spremenljivki R.

$$S'(R) = 2\left(2\pi R - \frac{2V}{R^2}\right)$$

Stacionarna točka je torej dosežena pri $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. To vstavimo v enačbo za volumen in izračunajmo optimalno razmerje med polmerom osnovne ploskve in višino konzerve.

$$\frac{R}{v} = 2$$

Ali pa je to res minimum za površino konzerve? Prepričajmo se z izračunom drugega odvoda optimizacijske funkcije.

$$S''(R) = 4\pi + 4\frac{V}{R^3}$$

Za vse smiselne vrednosti V in R je drugi odvod pozitiven, zato so vse stacionarne točke lokalni minimumi. □

Naloga 4.9.9. *Dana je krivulja $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Med vsemi pravokotniki, ki imajo dve oglišči na tej krivulji in dve oglišči na njeni asimptoti poišči tistega, ki ima največjo ploščino.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 4.9.10. *Kroglo s polmerom R pokrijemo s stožcem, ki ima najmanjši možni volumen. Določi osnovno ploskev in višino takšnega stožca.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

5 Integralni račun

5.1 Integralska praksa

Naloga 5.1.1. *Izračunaj naslednje nedoločene integrale.*

$$
\begin{array}{lll}
a)\ \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx & b)\ \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}} & c)\ \displaystyle\int \sqrt{\frac{\arcsin(x)}{1-x^2}}\,dx \\
d)\ \displaystyle\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx & e)\ \displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+\log(x)}{x}\,dx & f)\ \displaystyle\int \frac{x^2}{2+x^6}\,dx \\
g)\ \displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx & h)\ \displaystyle\int \frac{dx}{e^x+3} & i)\ \displaystyle\int xe^{-(x^2+1)}\,dx \\
j)\ \displaystyle\int \frac{dx}{\sin(x)\cos(x)} & k)\ \displaystyle\int \sin^3(6x)\cos(6x)\,dx & l)\ \displaystyle\int \frac{x}{\sin(x^2)}\,dx \\
m)\ \displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x+3} & n)\ \displaystyle\int \sin(3x)\cos(2x)\,dx & o)\ \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}
\end{array}
$$

Rešitev:

a) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1}+C$

c) $\int \sqrt{\frac{\arcsin(x)}{1-x^2}}\,dx = \frac{2}{3}\arcsin^{\frac{3}{2}}(x)+C$

i) $\int xe^{-(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}e^{-(x^2+1)}$

n) Če uporabimo formulo $\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\sin(m-n)x+\sin(m+n)x)$ dobimo rešitev

$$\frac{1}{2}(-\cos(x)-\frac{1}{5}\cos(5x))+C$$

.

□

Naloga 5.1.2. *Izračunaj naslednje nedoločene integrale racionalnih funkcij.*

$$
\begin{array}{lll}
a)\ \displaystyle\int \frac{dx}{x+3} & b)\ \displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^5} & c)\ \displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-8}\,dx \\
d)\ \displaystyle\int \frac{4x+7}{x^2+2x+2}\,dx & d)\ \displaystyle\int \frac{2-x}{x^2+2x+1}\,dx & d)\ \displaystyle\int \frac{2x^4-x^3-4x^2+2x+4}{2x^3-3x^2+1}\,dx
\end{array}
$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 5.1.3. *Naslednje integrale izračunaj s pomočjo integracije per partes.*

$$a)\ \int xe^{2x}\,dx \qquad b)\ \int x^2\cos(x)\,dx \qquad c)\ \int \arcsin(x)\,dx$$

Rešitev:
a) $\int xe^{2x}\,dx$ Vzamimo, da je $u = x$ in $dv = e^{2x}dx$. Dobimo $du = dx$ in $v = \frac{1}{2}e^{2x}$. Če uporabimo formulo za integriranje per partes $\int u(x)\cdot dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\cdot du(x)$ dobimo rezultat $\int xe^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$.

b) Naj bo $\int x^2\cos(x)\,dx$ Integriranje per partes bomo uporabili dvakrat. Vzamimo da je $u = x^2$ in $dv = \cos(x)\,dx$, torej je $du = 2x\,dx$ in $v = \sin(x)$. Če enkrat integriramo, dobimo $x^2\sin(x) -\ 2\int x\sin(x)\,dx$. Če to še enkrat integriramo (vzamimo $u = x$ in $dv = sin(x)\,dx$), pa dobimo

$$\int x^2\cos(x)\,dx = x^2\sin(x) + 2x\cos(x) + 2\cos(x) + C$$

c) $\int \arcsin(x)\,dx$. Naj bo $u = \arcsin(x)$ in $dv = dx$. Dobimo, da je $du = \frac{1}{1-x^2}\,dx$ in $v = x$. Integriramo per partes in dobimo $\int \arcsin(x)\,dx = x\cdot\arcsin(x) -\ \int \frac{x}{1-x^2}\,dx$ oziroma

$$\int \arcsin(x)\,dx = x\cdot\arcsin(x) + \frac{1}{2}\log(1-x^2) + C$$

□

Naloga 5.1.4. *Za izračun spodnjih dveh integralov najprej dvakrat integriraj per partes, nato pa zapiši enačbo in iz nje izračunaj rezultat.*

$$a)\ \int e^x\cos(x)\,dx \qquad b)\ \int e^x\sin(\pi x)\,dx$$

Rešitev:
a) Zapišimo $I =\ \int e^x\cos(x)\,dx$, $u = e^x$ in $dv = \cos(x)\,dx$, torej je $du = e^x\,dx$ in $v = -\sin(x)$. Enkrat integriramo in dobimo

$$I = -e^x\sin(x) + \int e^x\sin(x)\,dx.$$

Še enkrat integriramo in dobimo
$I = -e^x\sin(x) + e^x\cos(x) -\ \int e^x\cos(x)\,dx$ oziroma $I = -e^x\sin(x) + e^x\cos(x) - I$,
od koder sledi

$$I = \frac{1}{2}(-e^x\sin(x) + e^x\cos(x)) + C\,.$$

□

Naloga 5.1.5. *Izračunaj naslednje integrale. Če je potrebno, uporabi univerzalno trigonometrično ali pa hiperbolično trigonometrično substitucijo.*

$$a) \int \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx \qquad b) \int \frac{dx}{\sin(x)} \qquad c) \int \sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$d) \int \sin^4(x)\cos^4(x)\,dx \qquad e) \int \cos^7 x\,dx \qquad f) \int \sin^2(x)\cos^3(x)\,dx$$

Rešitev:
f)

$$\int \sin^2(x)\cos^3(x)\,dx = \int \sin^2(x)\cos(x)(1-\sin^2(x))\,dx =$$
$$= \int \sin^2(x)\cos(x) - \sin^4(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{3}\sin^3(x) - \frac{1}{5}\sin^5(x)$$

□

Naloga 5.1.6. *Izračunaj nedoločene integrale s pomočjo kanoničnih substitucij $x = a\sin t$, $x = \frac{a}{\cos t}$ in $x = a\tan t$:*

1.
$$\int \sqrt{4-x^2}dx$$

2.
$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$$

3.
$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

Rešitev:
1.) Vzamimo, da je $x = 2\sin(t)$. Potem dobimo $\int \sqrt{4-x^2}dx = \int \sqrt{4-4sin^2(t)} \cdot 2\cos(t)\ dt$. Če to malo preuredimo, dobimo $\int 4\cos^2(t)\ dt$. Uporabimo formulo $\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$. To poenostavi naš izraz in dobimo $\int 4\cos^2(t)\ dt = 2t + sin(2t) + C$.
Sedaj uporabimo $t = \arcsin(\frac{x}{2})$ in dobimo rešitev

$$\int \sqrt{4-x^2}dx = 2\arcsin(\frac{x}{2}) + \sin(2\arcsin(\frac{x}{2}))$$

□

5.2 Določeni integral

Naloga 5.2.1. *Izračunaj naslednje določene integrale.*

$$a) \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} \qquad b) \int_1^3 \frac{dx}{x^2+x} \qquad c) \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$d) \int_0^\pi x\sin(x)\,dx \qquad e) \int_e^{e^3} \frac{\log(x)}{x}\,dx$$

Rešitev:
a) Imamo

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$$

ali če to integriramo, po osnovni tabeli za integriranje dobimo

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \log(x+\sqrt{x^2+9})|_0^4$$

oziroma $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \log 3$.
b) Če vzamemo da je $u = \log(x)$ dobimo da je $du = \frac{1}{x}\, dx$. Če integriramo z vstavljanjem nove spremenjivke, dobimo

$$\int_1^3 u\, du = \frac{1}{2}u^2|_1^3$$

oziroma

$$\int_e^{e^3} \frac{\log(x)}{x}\, dx = 4$$

□

Naloga 5.2.2. *Naslednji integral se lahko izračuna "v trenutku", če upoštevaš prave lastnosti integranda in intervala, po katerem integracija poteka.*
Poizkusi ...

$$\int_{-\pi}^{\pi} (e^{3x^4} - 5)\, x^2 \arctan x^5\, dx$$

Rešitev:
Integral ima vrednost 0, zato ker je $(e^{3x^4} - 5)\, x^2 \arctan x^5$ liha funkcija, integriramo pa na intervalu, ki je simetričen glede na koordinatno izhodišče. □

Naloga 5.2.3. *Izračunaj ploščino lika, ki ga na intervalu od $-\pi$ do π opišeta funkcija $f(x) = x\sin(x)$ in os x.*

Rešitev:
Ploščina lika je vrednost integrala

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\, dx - \int_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)\, dx$$

Če to izračunamo, dobimo $\pi^2 + 2\pi$ □

Naloga 5.2.4. *Izračunaj spodnji integral.*

$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2+x}$$

Skiciraj integrand (funkcijo, ki jo integriramo) in na grafu označi ploščino, ki si jo pravkar izračunal.

Rešitev:

$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2+x} = \int_1^3 \frac{dx}{x} - \frac{dx}{x+1}$$

oziroma po integriranju

$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2+x} = \log(x) - \log(x+1)|_1^3$$

. Vrednost integrala je $\log(\frac{3}{2})$ □

Naloga 5.2.5. *Na hiperboli $x^2 - y^2 = 1$ vzemimo točko s koordinatami $x = 2$, $y = \sqrt{3}$, označimo jo v obliki $x = \cosh a$, $y = \sinh a$ (kjer je $a = Log2 + \sqrt{3}$, kar pa za to nalogo ni pomembno). Izračunajte ploščino krivočrtnega trikotnika, ki ga omejuje hiperbola $x^2 - y^2 = 1$, poltrak iz koordinatnega izhodišča skozi točko $\left(2, \sqrt{3}\right)$ in os x. Dobljeno ploščino izrazite z a.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

5.3 Posplošeni integral

Naloga 5.3.1. *Izračunaj naslednje posplošene integrale.*

$$a)\ \int_0^\infty e^{-x}\,dx \qquad b)\ \int_0^{\pi/2} \tan x\,dx \qquad c)\ \int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,dx$$

$$d)\ \int_0^1 \frac{dx}{x^2-2x+1} \qquad e)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} \qquad f)\ \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 5.3.2. *Utemelji (ne) konvergenco naslednjih posplošenih integralov.*

$$a)\ \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{3/2}} \qquad b)\ \int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx \qquad c)\ \int_e^\infty \frac{dx}{\log x}$$

$$d)\ \int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{1+x^2} \qquad e)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \qquad f)\ \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

5.4 Diferencialne enačbe

Naloga 5.4.1. *Izračunaj splošno rešitev naslednjih diferencialnih enačb.*

$a)\ xyy' = 1 - x^2 \qquad b)\ y^2y' = 1 - 2x \qquad c)\ xy' + y = y^2$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 5.4.2. *Izračunaj partikularno rešitev naslednjih diferencialnih enačb.*

$$a)\ y' + y^2 \sin x = 0 \qquad y(0) = 0$$
$$b)\ 2xy' + y = 0 \qquad y(4) = 1$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 5.4.3. *Poišči ortogonalne trajektorije na družino krožnic v centralni legi.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 5.4.4. *Dana je družina parabol $y = ax^2$. Poišči ortogonalne trajektorije na to družino.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 5.4.5. *Naj bo* $f(x)$ *tista rešitev diferencialne enačbe* $\quad y'\,(1+2e^x) = e^x\,y$ *, ki gre skozi točko* $T(0,\sqrt{3})$*. Dokaži, da ne obstaja realna rešitev enačbe* $f(x) = \sin x$*.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 5.4.6. *Poišči krivuljo, ki gre skozi točko* $(1, 1/3)$ *in za katero je koeficient tangente v vsaki točki trikrat večji kot koeficient premice skozi to točko in izhodišče.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 5.4.7. *Smerni koeficient tangente na krivuljo je v vsaki točki enak kvadratu ordinate te točke. Poišči vse krivulje, ki zadoščajo temu pogoju in nato med njimi izberi tisto, ki gre skozi točko* $(-1, 1)$*.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

5.5 Uporabne naloge

Naloga 5.5.1. *Izračunaj ploščini dveh krivočrtnih trikotnikov, ki ju opisujejo krivulje, podane z grafi funkcij* $f(x) = 1 - x^2$*,* $g(x) = \log(x)$ *in* $h(x) = -1$*.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 5.5.2. *Homogena veriga je položena na mizo tako, da nekoliko visi čez rob. Čez koliko časa bo padla na tla (predpostavljajoč da trenja ni)?*

Rešitev:
Označimo z l dolžino celotne verige in z b dolžino kosa, ki leži na mizi. S funkcijo $x(t)$ označimo dolžino verige, ki ob času t visi čez rob mize. Naloga sprašuje, ob katerem t bo $x(t) = l$. Na začetku poizkusa velja $x(0) = l - b$ in $\dot{x}(0) = 0$, saj je hitrost premikanja verige na začetku ničelna. Edina sila, ki deluje na verigo, je sila teže njenega konca, ki visi čez rob mize. Zapišimo Newtonov zakon za ta primer.

$$F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x} = m \cdot \dot{v}$$

Naj bo ρ dolžinska gostota verige. Zapišimo $F = \rho g x$, $m = \rho l$ in $\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$ ter to vstavimo v zgoraj zapisani Newtonov zakon. Dobimo naslednjo diferencialno enačbo.

$$gx = lv\frac{dv}{dx}$$

Njena splošna rešitev je

$$gx^2 = lv^2 + C.$$

V splošno rešitev vstavimo začetna pogoja, da dobimo partikularno rešitev, ki opisuje naš primer.

$$gx^2 = lv^2 + g(l-b)^2.$$

Nas seveda zanima, kdaj veriga pade iz mize, zato si želimo določiti funkcijo $t(x)$, ki bi podajala čas v odvistnosti od dolžine dela verige, ki gleda čez mizo. Najprej izrazimo hitrost v kot funkcijo x.

$$\frac{dx}{dt} = v = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{x^2 - (l-b)^2}$$

Dobimo naslednjo diferencialno enačbo.

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - (l-b)^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\, dt$$

Njena rešitev je funkcija

$$\log\left|x + \sqrt{x^2 - (l-b)^2}\right| + \log C = \sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

Z vstavljanjem začetnega pogoja $x(0) = l - b$ določimo še konstanto C in končno dobimo rešitevi.

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \log\left|\frac{x}{l-b} + \sqrt{\frac{x}{l-b} - 1}\right|$$

Sedaj vstavimo vrednost $x = l$ in izračunajmo pripadajoči čas

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \log\left|\frac{l}{l-b} + \sqrt{\frac{l}{l-b} - 1}\right|.$$

Pripomnimo še, da rezultat ustreza tudi nekaterim posebnim primerom. Za $b = l$ dobimo $t = \infty$ (veriga, ki ne gleda čez rob mize ne bo padla čez) in za $b = 0$ dobimo $t = 0$ (torej je veriga, ki ni na mizi, že padla čez). $\square$

Naloga 5.5.3. *Herlock Sholms pride na kraj zločina in izmeri, da je temparatura trupla* 31°C. *Čez eno uro spet izmeri temparaturo ohlajajočega se trupla, ki je takrat* 28°C. *V tem času se temparatura zraka ni spreminjala in je znašala* 25°C. *Kdaj se je zgodil umor?*

Rešitev:
Predpostavljamo, da je hitrost spreminjanja temparature v času premo sorazmerna z temparaturno razliko, kar lahko s formulo zapišemo takole:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0).$$

Tu je k sorazmernostni koeficient, T trenutna temparatura (trupla v našem primeru) in T_0 temparatura okolice. Rešitev zgornje diferencialne enačbe je družina krivulj

$$\log(T - T_0) = kt + C.$$

Določiti moramo še konstanti k in C. Naj bo $t_0 = 0$ čas prve meritve in $t_1 = 1$ čas druge meritve. Vstavimo rezultate meritev v rešitev diferencialne enačbe.

$$\begin{aligned} \log(31 - 25) &= k \cdot 0 + C \\ \log(28 - 25) &= k \cdot 1 + C \end{aligned}$$

Od tod izračunamo kostanti $k = \log(1/2)$ in $C = \log(6)$. Torej se partikularna rešitev enačbe, ki opisuje ohlajanje trupla, glasi takole:

$$\log(T - 25) = t \cdot \log(1/2) + \log(6).$$

Kdaj se je umor zgodil? Takrat, ko se je truplo začelo ohlajati. Predpostavljamo lahko, da je bila temparatura svežega trupla enaka 37°C. Torej moramo rešiti enačbo

$$\log(37 - 25) = t \cdot \log(1/2) + \log(6).$$

Hitro ugotovimo, da je $t = -1$. Umor se je torej zgodil eno uro pred prvo meritvijo. □

Naloga 5.5.4. *Na začetku okužbe je okuženih* 10% *računalnikov, po eni uri pa že* 40%. *Kolikšna je stopnja okužbe po dveh urah? Širjenje okužbe modeliraj z logistično enačbo:*

$$y' = k\,y(1 - y)\ .$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□