Vaje Ana2Uni – FRI

Seznam primernih vaj in kakšna rešitev . . .

Prvič sestavljeno: 12. januar 2007
Zadnji popravek 28. maj 2008

Opozorilo

Ti zapiski vsebujejo napake. Odkrivanje in odpravljanje le-teh je sestavni del učnega procesa.

Kazalo

1 Krivulje v ravnini

1.1 Parametrično podane krivulje

Naloga 1.1.1. *Parametriziraj premico v ravnini, ki gre skozi točki* $(1, 1)$ *in* $(-2, 4)$ *ter krožnico, s polmerom* 3 *in središčem v* $(-1, 1)$. *Poišči presečišča teh dveh krivulj.*

Rešitev:
Parametrična enačba premice skozi točki $A(x_0, y_0)$ in $B(x_1, y_1)$ je

$$x(t) = x_0 + (x_1 - x_0)t,$$

$$y(t) = y_0 + (y_1 - y_0)t,$$

Enačba dane premice je tako $x(t) = 1 - 3t$, $y(t) = 1 + 3t$.
Parametrična enačba krožnice s središčem $S(x_0, y_0)$ in polmerom a je

$$x(t) = a\cos t + x_0,$$

$$y(t) = a\sin t + y_0,$$

Enačba dane krožnice je torej $x(t) = 3\cos t - 1$ in $y(t) = 3\sin t + 1$.
Za računanje presečišč je prikladnejša implicitna oblika obeh krivulj. Implicitna enačba premice skozi točki $A(x_0, y_0)$ in $B(x_1, y_1)$ je

$$y - y_0 = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0)$$

in enačba krožnice s središčem $S(x_0, y_0)$ in polmerom a je

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2,$$

Iščemo torej presečišče premice $y = -x+2$ in $(x+1)^2+(y-1)^2 = 9$. Vstavimo y iz prve enačbe v drugo, dobimo $(x + 1)^2 + (-x + 1)^2 = 9$, torej $x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$ in $y = \mp\sqrt{\frac{7}{2}} + 2$. Presečišči sta v točkah $P_1\left(\sqrt{\frac{7}{2}}, -\sqrt{\frac{7}{2}} + 2\right)$ in $P_2\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, \sqrt{\frac{7}{2}} + 2\right)$. □

Naloga 1.1.2. *Krivulja v ravnini je parametrizirana kot* $x(t) = 2t-t^2$ *in* $y(t) = 2t^2-t^3$. *Poišči točke na krivulji, kjer je tangenta na krivuljo vzporedna kateri izmed koordinatnih osi. Skiciraj krivuljo. Izračunaj ploščino lika, ki ga krivulja opiše v prvem kvadrantu.*

Rešitev:

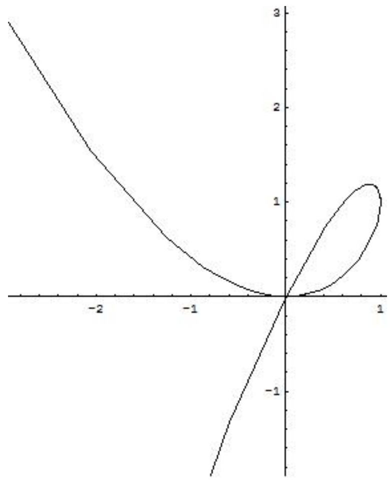
Tangenta na krivuljo je vzporedna ordinatni osi, kadar je

$$\dot{x}(t) = 0, \quad \dot{y}(t) \neq 0$$

in vzporedna abscisni osi, kadar je

$$\dot{y}(t) = 0, \quad \dot{x}(t) \neq 0$$

$\dot{x}(t)$ je enak 0 pri $t = 1$, $\dot{y}(t)$ pa pri $t = 0$ in $t = \frac{4}{3}$. Tangenta je vzporedna osi y to točki $T_0(1, 1)$, in osi x v točkah $T_1(0, 0)$ in $T_2(\frac{8}{9}, \frac{32}{27})$. Krivulja je v prvem kvadrantu, če je $x(t) \geq 0$ in $y(t) \geq 0$,



Slika 1: Krivulja z zanko.

torej za $t \in [0, 2]$. Pti $t = 0$ in $t = 2$ gre krivulja skozi koordinatno izhodišče, torej v prvem kvadrantu opišezanko. Ploščina zanke je enaka

$$S = \frac{1}{2} \int_0^2 |\dot{x}y - x\dot{y}| dt = \frac{8}{15}.$$

$\square$

Naloga 1.1.3. *Krivulja v ravnini je parametrizirana kot*

$$x(t) = t^2 - 1 \quad in \quad y(t) = t^3 - t^2 - t + 1.$$

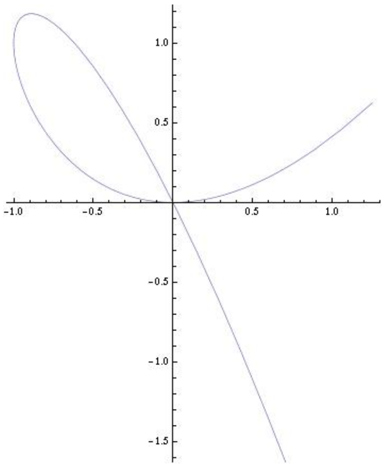
1. *Poišči točke na krivulji, v katerih je tangenta na krivuljo vzporedna osi x oziroma osi y.*
2. *Zapiši enačbi obeh tangent na krivuljo v koordinatnem izhodišču.*
3. *Skiciraj krivuljo.*
4. *Izračunaj ploščino zanke, ki jo opiše krivulja.*

Rešitev:

1. Tangenta na krivuljo je vzporedna ordinatni osi, kadar je $\dot{x}(t) = 0$ in $\dot{y}(t) \neq 0$, in vzporedna abscisni osi, kadar je $\dot{y}(t) = 0$ in $\dot{x}(t) \neq 0$.

   Računamo:
   $$\dot{x}(t) = 2t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_0 = 0$$
   $$\dot{y}(t) = 3t^2 - 2t - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = 1,\ t_2 = -1/3$$

   Tangenta je vzporedna ordinatni osi v točki $T_0(-1, 1)$, abscisni osi pa v točkah $T_1(0, 0)$ in $T_2(-\frac{8}{9}, \frac{32}{27})$.



Slika 2: Krivulja $x(t) = t^2 - 1\,, \quad y(t) = t^3 - t^2 - t + 1$

2. Krivulja gre skozi koordinantno izhodišče, ko je $t_1 = -1$ in $t_2 = 1$. Enačbi tangent lahko zapišemo na primer z uporabo formule

$$y(x) = y(t_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x(t_0))\ .$$

Tako dobimo naslednji enačbi tangent:

$$y_{t_1} = -2x \quad \text{in} \quad y_{t_2} = 0\ .$$

3. Skica krivulje, ki jo opisuje zgornja parametrizacija, je prikazana na sliki 2.
4. Ploščina lika, ki ga krivulja opiše v prvem kvadrantu, je enaka

$$S = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} |\dot{x}y - x\dot{y}|dt = \frac{8}{15}.$$

□

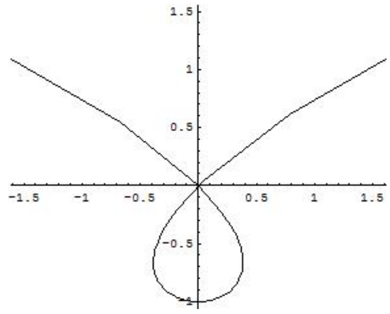
Naloga 1.1.4. *Nariši graf krivulje, podane v parametrični obliki kot* $\vec{r}(t) = (t^3 - t, t^2 - 1)$. *Izračunaj tudi ploščino zanke, ki jo opiše krivulja.*

Rešitev:

Tako podana krivulja opiše zanko, ki je simetrična glede na ordinatno os, začne in konča pa se v koordinatnem izhodišču. Krivulja vstopi skozi izhodišče pri $t = -1$, izstopi pa pri $t = 1$.

$$S = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |(3t^2 - 1)(t^2 - 1) + (t^3 - t)(2t)|dt = \int_{0}^{1} |(3t^2 - 1)(t^2 - 1) + (t^3 - t)(2t)|dt = \frac{8}{15}.$$

□



Slika 3: Še ena krivulja z zanko.

Naloga 1.1.5. *Krivulja v ravnini je parametrizirana kot* $x(t) = -\dfrac{1}{1+t^2}$ *in* $y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2}$.

1. *Skiciraj krivuljo. Izračunaj tudi asimptoto.*
2. *Ali je ploščina lika, ki ga opišeta krivulja in njena asimptota končnač*
   Namig: Ploščine ni nujno do konca izračunati.

Rešitev:

1. Ko gre $t \to \pm\infty$, gre $x(t) \to 0$ in $y(t) \to \pm\infty$, torej ima krivlja asimptoto $x = 0$.
2. Ploščina neomejenega lika med krivuljo in asimptoto $x = 0$ je podana z integralom

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{x}y - x\dot{y}|dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{t^4+3t^2}{(1+t^2)^3}\right| dt,$$

   ki je konvergenten, saj je razlika stopenj v števcu in v imenovalcu 2.

□

Naloga 1.1.6. *Krožnica K ima središče v točki* $S(a, 0)$*, kjer je* $a > 0$*, in gre skozi izhodišče koordinatnega sistema. Poišči enačbo te krožnice* **v polarni obliki** *in z uporabo tega opisa izpelji formulo za ploščino kroga. S pomočjo parametrizacije v ravnini izpelji formulo za obseg kroga.*

Rešitev:
Krožnica je opisana z enačbo $(x-a)^2+y^2 = a^2$ ali, bolj preprosto, $x^2-2ax+y^2 = 0$. V enačbo vpeljemo polarni koordinati: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ in dobimo $r^2 - 2ar\cos\varphi = 0$, torej

$$r = 2a\cos\varphi.$$

Da bi dobili ploščino kroga, uporabimo formulo

$$P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4a^2\cos^2\varphi = a^2\pi,$$

kar je res formula za ploščino kroga.
Enačba krožnice v parametrični obliki je

$$x(\varphi) = r\cos\varphi = 2a\cos^2\varphi, \quad y(\varphi) = r\sin\varphi = 2a\sin\varphi\cos\varphi.$$

Dolžina loka krožnice, tj. obseg kroga, je

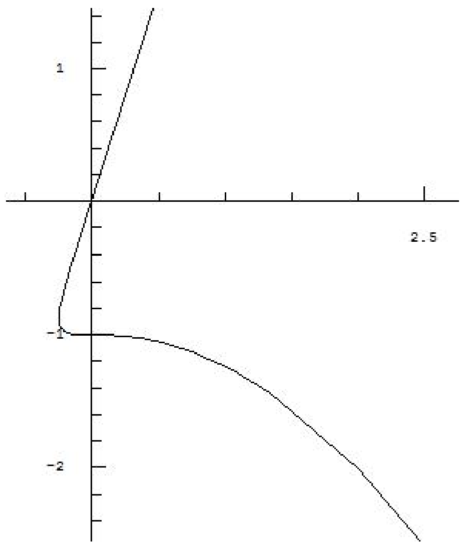
$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2a\sqrt{\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi} = 2\pi a.$$

□

Naloga 1.1.7. *Nariši krivuljo, podane v parametrični obliki kot* $\vec{r}(t) = (t^2 - t, t^3 - 1)$.

Rešitev:

□



Slika 4: $\vec{r}(t) = (t^2 - t, t^3 - 1)$.

Naloga 1.1.8. *Krivulja v ravnini je parametrizirana kot* $x(t) = te^t$ *in* $y(t) = te^{-t}$. *Skiciraj krivuljo in določi enačbo tangente pri* $t = 1/2$.

Rešitev:
Enačba tangente je:

$$y = y(t_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x(t_0)).$$

V $t = \frac{1}{2}$ je $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2\sqrt{e}}$, $x(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{e}}{2}$, $\dot{x}(\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{e}}{2}$ in $\dot{y}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2\sqrt{e}}$ in enačba tangente je

$$y = \frac{x}{3e} + \frac{1}{3\sqrt{e}}.$$

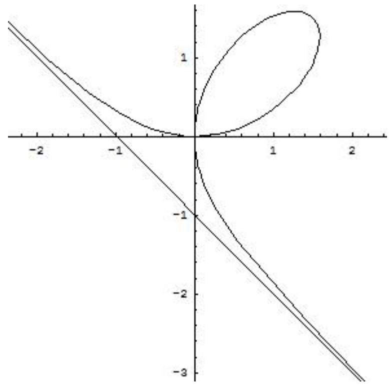
□

Naloga 1.1.9. *Skiciraj krivuljo, ki se imenuje* Descartesov list. *Podana je paremetrično:*

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \qquad\qquad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}\ .$$

Izračunaj tudi asimptoto in na koncu izračunaj še ploščino "lista".

Rešitev:



Slika 5: Descartesov list.

Ko gre $t \to \pm\infty$, funkciji $x(t)$ in $y(t)$ obe limitirata proti 0, torej se točka na krivulji približuje točki $(0,0)$. Pri $t = -1$ imata funkciji $x(t)$ in $y(t)$ obe pol, torej se točka na krivulji, ko gre $t \to -1$ oddaljuje od izhodišča koordinatnega sistema. Asimptota obstaja, če obstajata

$$k = \lim_{t\to-1}\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) \quad \text{in} \quad n = \lim_{t\to-1}(y(t) - (-1)x(t)).$$

V našem primeru je

$$k = \lim_{t\to-1} t = -1 \quad \text{in} \quad n = \lim_{t\to-1}\frac{3t(t+1)}{(1+t)(1-t+t^2)} = -1.$$

Enačba asimptote je torej

$$y = -x - 1.$$

Krivulja opiše "list" na intervalu $t \in (0,\infty)$, ploščina lista je torej

$$S = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\dot{x}y - x\dot{y})dt = \frac{3}{2}.$$

□

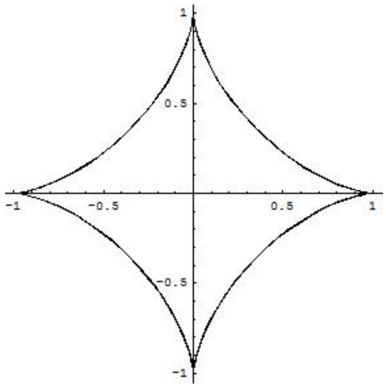
Naloga 1.1.10. *Krivulja z imenom* astroida *je podana parametrično kot* $\vec{r}(t) = \big(\cos^3 t, \sin^3 t\big)$. *Ugotovi, od kod njeno ime (tako da jo narišeš) in izračunaj njeno dolžino.*

Rešitev:

Ker sta cos in sin periodični funkciji, točka opiše celotno krivuljo, ko $t \in [0, 2\pi]$. Torej je dolžina astroide

$$l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt = 6.$$

□



Slika 6: Astroida.

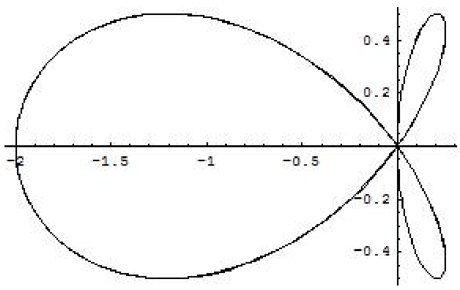
1.2 Krivulje, podane s polarnim zapisom

Naloga 1.2.1. *Izračunaj ploščino "ribe", ki je za $a > 0$ podana parametrično kot*

$$\vec{r}(t) = (-a\cos t(1+\cos t), -a\cos t\sin t)\ .$$

Krivuljo zapiši tudi v polarni obliki.

Rešitev:
Krivulja je simetrična glede na os x, zato je



Slika 7: Riba pri a=1.

$$S = 2\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\dot{x}y - x\dot{y})dt + 2\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\dot{x}y - x\dot{y})dt$$

Na srečo so integrali aditivni, pa še ulomki se krajšajo. Ostane le neprijetna operacija dejanskega integriranja, zato nasvet: če se znajdeš med integriranjem funkcije $\cos^3 x$, potem si pomagaj s prevajanjem na trojne kote:

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$$

$$\sin 3x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x$$

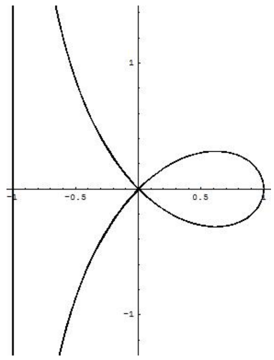
Rezultat je $S = \frac{8}{3}a^2$. Poglej za primer $x(t) = -\cos t(1+\cos t)$ in $y(t) = -\cos t\sin t$, da je ploščina res $\frac{8}{3}(\doteq 2,7)$. $\square$

Naloga 1.2.2. Strofoida *je krivulja, podana v polarni obliki z enačbo*

$$r(\varphi) = a\frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}\,, \qquad\qquad a > 0\;.$$

Skiciraj krivuljo (poračunaj tudi asimptoto) in izračunaj ploščino njene zanke.

Rešitev:



Slika 8: Strofoida.

Ob pretvorbi iz polarne oblike v parametrično dobimo

$$x(\varphi) = a\cos 2\varphi, \quad y(\varphi) = a\frac{\sin\varphi\cos 2\varphi}{\cos\varphi} = a\tan\varphi\cos 2\varphi.$$

Pri odvajanju obeh zadev dobimo $\dot{x}(\varphi) = -a2\sin 2\varphi$ in $\dot{y}(\varphi) = a(1-\tan^2\varphi - 4\sin^2\varphi)$. Koeficient asimptote je torej

$$\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} \frac{\dot{y}(\varphi)}{\dot{x}(\varphi)} = \infty$$

(φ pošljemo v tisto vrednost, kjer se funkcija približuje neskončnosti.) Ta račun pokaže, da je asimptota navpična, torej je njena enačba oblike

$$x = m.$$

Torej mora veljati

$$\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} (x(\varphi) - m) = 0.$$

Za $x(\varphi)$ vstavimo $a\cos 2\varphi$ in dobimo

$$\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} (a\cos 2\varphi - m) = 0$$

ter

$$-a - m = 0$$

in s tem

$$m = -a.$$

Enačba ploščine za krivuljo, podano v polarni obliki, je

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Podobno kot prej, pazimo na zgornjo in spodnjo mejo. Recimo, da gledamo kot φ od 0 do $\frac{\pi}{4}$ - tam dobimo polovico iskane ploščine. Torej je velikost ploščine naše zanke enaka

$$S = 2\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(a\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}\right)^2 d\varphi.$$

Iskana ploščina zanke pri poljubnem a je torej

$$S = a^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right).$$

□

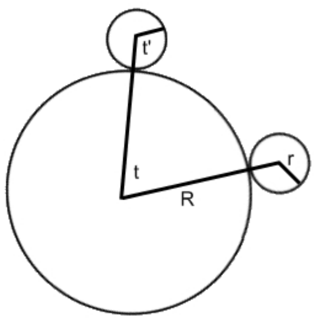
Naloga 1.2.3. *Opiši gibanje točke na manjšem obroču, ki se kotali po obodu večjega obroča, na njegovi zunanji strani. Če je radij večjega obroča večkratnik radija manjšega, je krivulja sklenjena.*

Takšni krivulji pravimo epicikloida.

Rešitev:
Epicikloido dobimo tako, da sledimo točki na krožnici s polmerom r, ki se kotali po zunanji strani neke druge krožnice s polmerom R. t predstavlja kot, s katerim se središče malega kroga premika glede na središče velikega kroga, t' pa kot, s katerim se premika opazovana točka, ki leži na obodu malega kroga okrog njegovega središča (glede na začetni položaj). Velja

$$t \cdot R = t' \cdot r - t \cdot r$$

$$t' = \frac{r+R}{r} \cdot t.$$



Slika 9: Konstrukcija epicikloide.

Enačba za epicikloido je potem

$$x(t) = (r+R)\cos t - r\cos t' = (r+R)\cos t - r\sin\left(\frac{r+R}{r}t\right)$$

$$y(t) = (r+R)\sin t - r\sin t' = (r+R)\sin t - r\sin\left(\frac{r+R}{r}t\right).$$

□

Naloga 1.2.4. *Opiši gibanje točke na manjšem obroču, ki se kotali po obodu večjega obroča, na njegovi notranji strani. Če je radij večjega obroča večkratnik radija manjšega, je krivulja sklenjena.*

Takšni krivulji pravimo hipocikloida.

Rešitev:
Hipocikloido dobimo tako, da sledimo točki na krožnici z polmerom r, ki se kotali po notranji strani neke druge krožnice s polmerom R. Pravzaprav rišemo cikloido na notranjo stran krožnice. Spremenljivka t predstavlja kot, s katerim se središče malega kroga premika glede na središče velikega kroga. Velja

$$x(t) = (r-R)\cos t - r\cos\left(\frac{r-R}{r}t\right)$$

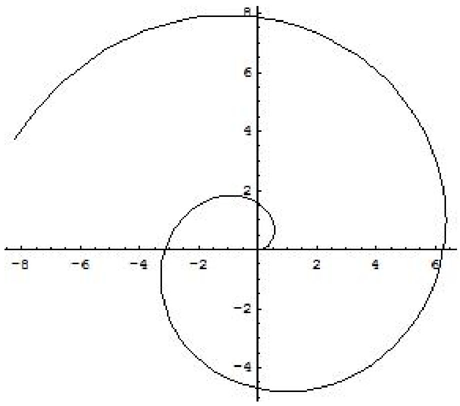
in

$$y(t) = (r-R)\sin t - r\sin\left(\frac{r-R}{r}t\right).$$

□

Naloga 1.2.5. *Skiciraj Arhimedovo spiralo, podano z $r(\varphi) = a\varphi$, in logaritemsko spiralo, podano z $r(\varphi) = ae^{m\varphi}$. Dokaži, da logaritemska spirala seka vsak poltrak iz koordinatnega izhodišča pod istim kotom.*

Rešitev:



Slika 10: Arhimedova spirala.

Formula za kot med dvema premicama je

$$\tan\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Naj bo k_1 smerni koeficient poltraka iz koordinatnega izhodišča, k_2 pa smerni koeficient tangente na logaritemsko spiralo v presečišču s poltrakom. Torej je

$$k_1 = \tan\varphi$$

in

$$k_2 = \frac{\dot{y}(\varphi)}{\dot{x}(\varphi)}.$$

Parametrizacija logaritemske spirale je $x(\varphi) = ae^{m\varphi}\cos\varphi$ in $y(\varphi) = ae^{m\varphi}\sin\varphi$. Če odvajamo $x(\varphi)$ in $y(\varphi)$, in vse skupaj vstavimo v enačbo za kot med dvema premicama, dobimo

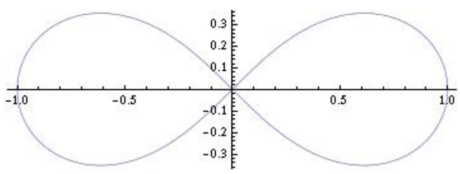
$$\tan\alpha = \frac{1}{m} \quad \text{oziroma} \quad \alpha = \arctan\frac{1}{m}.$$

Kot med krajevnim vektorjem in tangento torej res ni odvisen od kota φ, ampak samo od podanega začetnega m. □

Naloga 1.2.6. *S pomočjo prevedbe na polarni koordinatni sistem, skiciraj graf funkcije, podane z enačbo*

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right) .$$

Rešitev:



Slika 11: Skica krivulje za $a = 1$.

Zvezi $x(\varphi) = r(\varphi)\cos(\varphi)$ in $y(\varphi) = r(\varphi)\sin(\varphi)$ vstavimo v prvotno enčbo in dobimo

$$\left(r^2(\varphi)\cos^2(\varphi) + r^2(\varphi)\sin^2(\varphi)\right)^2 = a^2\left(r^2(\varphi)\cos^2(\varphi) - r^2(\varphi)\sin(\varphi)\right)$$

oziroma

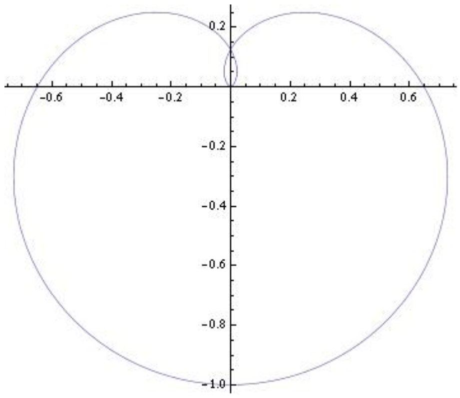
$$r^4(\varphi) = a^2 r^2(\varphi)\left(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right)$$

$$r(\varphi) = a\sqrt{\cos(2\varphi)}$$

Definicijsko območje naše funkcije je $D = \left[-\pi/4, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$ □

Naloga 1.2.7. *Skiciraj in izračunaj dolžino loka krivulje*

$$r(\varphi) = a\sin^3\frac{\varphi}{3}.$$



Slika 12: Jabolko.

Rešitev:

Celotno sklenjeno krivuljo dobimo, ko $\varphi \in [0, 3\pi]$. Dolžino loka krivulje (skicirane na sliki 12) bomo izračunali z uporabo formule:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)}$$

Imamo

$$r(\varphi) = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$$

in

$$\dot{r}(\varphi) = a \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3}$$

To vstavimo v formulo za izračun dolžine loka in dobimo

$$l = \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2 \sin^6 \frac{\varphi}{3} + a^2 \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cos^2 \frac{\varphi}{3}} = a \int_0^{3\pi} sin^2 \frac{\varphi}{3} = \frac{3\pi}{2} a.$$

□

Naloga 1.2.8. *Nariši graf in določi ploščino lika, ki ga opiše krivulja, podana z enačbo*

$$r(\varphi) = 2a \cos 3\varphi \,, \qquad a > 0 \,.$$

Rešitev:

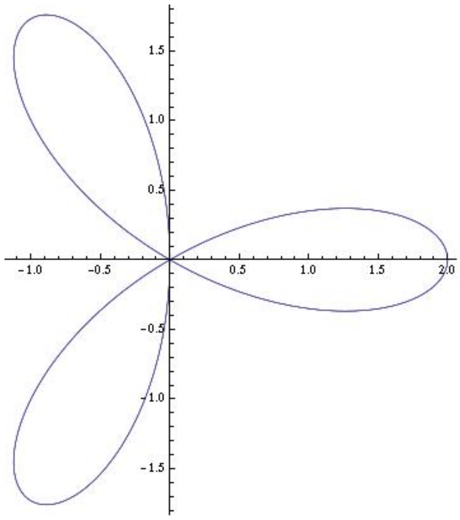
Območje, kjer je $\cos 3\varphi / geq 0$, je $\varphi \in [-\pi/6, \pi/6] \cup [\pi/2, 5\pi/6] \cup [7\pi/6, 3\pi/2]$.
Ploščino lika (skiciranega na sliki 13) bomo dobili s uporabo formule

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2(\varphi)\, d\varphi$$

Integriramo

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} 4a^2 \cos^2 3\varphi \, d\varphi = a \frac{1}{6}(\pi + \sin(\pi)).$$

Celotna ploščina je $A = 6A_1 = a(\pi + \sin(\pi))$ □



Slika 13: Detelica.

1.3 Krivulje drugega reda (stožernice)

Naloga 1.3.1. *Skiciraj naslednje stožernice.*

a) $x^2 - 2y^2 + 4x - 4y + 1 = 0$

b) $x^2 - 4\sqrt{2}x - 2xy + y^2 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 4xy = \sqrt{2}x - \sqrt{2}y$

d) $3x^2 + 3y^2 + 2xy + 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y = 0$

e) $13x^2 + 6\sqrt{15}xy - 29y^2 - 32 = 0$

f) $x^2 + 2xy + y^2 - 6\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y = 0$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 1.3.2. *Dokaži, da je ploščina neomejenega lika pod grafom funkcije* $f(x) = \frac{1}{x}$ *na intervalu* $[1, \infty)$ *neskončna, z vrtenjem krivulje okrog osi* x *pa dobimo telo s končnim volumnom.*

Rešitev:
Dana je funkcija $z = \frac{1}{x}$. Formula za ploščino lika ki ga dobimo, če krivuljo zrotiramo okrog x osi je:

$$P = 2\pi \int_a^b z(x)\sqrt{1 + \dot{z}(x)^2}\, dx$$

To izračunamo in dobimo, da je

$$P = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$

To lahko zpišemo kot

$$P = 2\pi \int_1^\infty \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\, dx$$

Morali bomo ugotoviti, ali je integral končen ali neskončen. Predpostavimo, da je integral neskončen. Trditev bomo dokazali, če primerjamo naš integral z integralom za keterega že vemo, da je neskončen.

$$P = 2\pi \int_1^\infty \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\, dx > P = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$$

Torej je ploščina neskončna. Volumen lika bomo izračunali s pomočjo formule:

$$V = \pi \int_a^b z^2(x)\, dx$$

oziroma

$$V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$$

Izračunamo in dobimo rezultat:

$$V = \pi$$

□

Naloga 1.3.3. *Izračunaj volumen telesa, dobljenega z vrtenje elipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ *okrog osi* x*.*

Rešitev:
Dana je funkcija

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Formula za izračun volumna je

$$V = \pi \int_{-a}^a z^2(x)\, dx$$

oziroma

$$V = 2\pi \int_0^a z^2(x)\, dx$$

Iz prvotne funkcije bomo izračunali, da je

$$z^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2$$

če to damo v formulo za izračun volumna in integriramo, dobimo

$$V = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

□

Naloga 1.3.4. *Z ustreznim premikom koordinatnega sistema prevedi krivuljo* $2x^2 + y^2 + 4x - 8y + 14 = 0$ *v znano (kaninočno) obliko.*

Rešitev:
Dana je funkcija

$$2x^2 + y^2 + 4x - 8y + 14 = 0$$

Funkcjo lahko preoblikujemo tako, da dobimo polne kvadrati. Dobili bomo

$$2(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 8y + 16) = 4$$

Oziroma

$$\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1.$$

S premikom $X = x + 1$, $Y = y - 4$ dobimo elipso $X^2/2 + Y^2/4 = 1$, ki ima središče v izhodišču, osi pa sta $\sqrt{2}$ in 2.

□

Naloga 1.3.5. *Z zasukom koordinatnega sistema za ustrezen kot α prevedi krivuljo $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 8 = 0$ v znano obliko.*

Rešitev:
Zveza med osnovnim in zavrtenim koordinatnim sistemom je

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \quad y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha$$

Vstavimo v enačbo in določimo kot α, kjer je koeficient pri mešanem člene XY enak 0. Dobimo enačbo $\cos 2\alpha = 0$, oziroma $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Izračunamo še koeficienta pri X^2 in Y^2 in dobimo

$$\frac{X^2}{4} - Y^2 = 1$$

Krivulja je torej hiperbola, zavrtena za $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

□

1.4 Krivulje višjih redov

Naloga 1.4.1. *Skiciraj krivuljo, podano z naslednjo zvezo.*

$$x^3 + y^3 - x - y = 0$$

Namig: v enačbo vstavi $y = tx$, da dobiš parametrizacijo.

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 1.4.2. *Podana je enačba $x^3 + y^3 - x - y = 0$.*

1. *Katere od točk $(1,0)$, $(2,2)$, $(-2,2)$ ležijo na krivulji, ki jo v ravnini podaja ta enačbač*

2. Pokaži, da krivulja vsebuje simetralo sodih kvadrantov.

3. Določi enačbo tangente na krivuljo v točki $(0,1)$.

Rešitev:

1. $(1,0)$ in $(-2,2)$
2. Za vsako točko $(x,-x)$ je $x^3+y^3-x-y = x^3+(-x)^3-x-(-x) = 0$.
3. Z odvajanjem enačbe dobimo

$$3x^2+3y^2y'-1-y'=0, \quad y' = -\frac{3x^2-1}{3y^2-1}.$$

Smerni koeficient tangente v točki $(0,1)$ je torej $y' = -1/2$, enačba tangente pa je

$$y-1 = -\frac{1}{2}x, \quad y = -\frac{x}{2}+1.$$

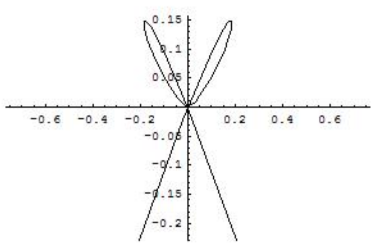
□

Naloga 1.4.3. *Skiciraj krivuljo, podano z naslednjo zvezo.*

$$x^6 - x^2y^3 - y^5 = 0$$

Namig: Uporabi dejstvo, da vsaka točka na ravnini leži na neki premici z enačbo $y = tx$ *ali pa premici* $x = 0$.

Rešitev:



Slika 14: Graf krivulje $x^6 - x^2y^3 - y^5 = 0$

V enačbo vstavimo $y = tx$

$$x^6 - x^5t^3 - x^5t^5 = 0$$

Ali,

$$x^5(x - t^3 - t^5) = 0$$

Sledi da je $x = y = 0$ ali pa $x = t^3 - t^5$ in $y = t^4 - t^6$. Edino presečišče krivulje s koordinatnima osema je točka $(0,0)$, skozi katero gre krivulja trikrat, pri $t = 0$ in $t = \pm 1$.

Poiščemo še točke, kjer je tangenta vodoravna

$$\dot{y} = 4t^3 - 6t^5 = 0, \quad t = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

ali navpična

$$\dot{x} = 3t^2 - 5t^4 = 0, \quad t = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$$

□

Naloga 1.4.4. *Skiciraj množico točk v ravnini, ki ustreza rešitvi naslednjih dveh (razcepnih!) enačb.*

a) $y^4 + 4xy^2 + 4x^2 - 1 = 0$ *b)* $2y^3 - xy^2 - 2x^2y + x^3 = 0$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 1.4.5. *Podana je krivulja v implicitni obliki:*

$$(x-a)^2(x^2+y^2) - lx^2 = 0 \; .$$

- *Krivuljo zapiši v polarni in parametrični obliki.*
- *Nariši krivuljo za izbiro $a = 2$ in $l = 1$.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

2 Kompleksna števila

2.1 Osnovne lastnosti $\mathbb{C}$

Naloga 2.1.1. *Naj bo $z = 3 + \sqrt{3}i$ in $w = -1 + \sqrt{3}i$. Poračunaj in nariši naslednja števila:*

$$\bar{x}, \quad z + w, \quad w^2, \quad zw \quad \text{in} \quad \tfrac{z}{w}.$$

Rešitev:

$\spadesuit$ V delu $\spadesuit$

$\square$

Naloga 2.1.2. *Za vsak $n \in \mathbb{N}$ izračunaj vrednost izraza $1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^n$.*

Rešitev:
Naj bo $S_n = 1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^n$. Ker je $1 + i + i^2 + i^3 = 0$, sledi:
Če $n \mod 4 = 0$ potem, $i^n = 1$, sledi $S_n = 1 + i - 1 - i + 1 + \cdots + 1$, ali $S_n = 1$.
Če $n \mod 4 = 1$ potem, $i^n = i$, sledi $S_n = 1 + i - 1 - i + 1 + \cdots + 1 + i$, ali $S_n = 1 + i$.
Če $n \mod 4 = 2$ potem, $i^n = -1$, sledi $S_n = 1 + i - 1 - i + 1 + \cdots + 1 + i - 1$, ali $S_n = i$.
Če $n \mod 4 = 3$ potem, $i^n = -i$, sledi $S_n = 1 + i - 1 - i + \cdots + 1 + i - 1 - i$, ali $S_n = 0$. $\square$

Naloga 2.1.3. *Naj bosta naravni števili a in b zapisljivi kot vsoti kvadratov dveh naravnih števil. Dokaži, da je potem tudi njun produkt zapisljiv kot vsota kvadratov dveh naravnih števil.*

Rešitev:

$\spadesuit$ V delu $\spadesuit$

$\square$

2.2 Enačbe s kompleksnimi števili

Naloga 2.2.1. *Reši naslednje enačbe nad kompleksnimi števili.*

a) $\bar{z} - 2iz = 1 + i$	*b)* $\bar{z} - iz^2 = 0$
c) $z\bar{z} + 1 = 0$	*d)* $z = 1 + \bar{z}$

Rešitev:
a) Kompleksno število z zapišimo kot $z = x+iy$, kjer $x, y \in \mathbb{R}$. Vstavimo v enačbo $\bar{z}-2iz = 1+i$ in dobimo $(x - iy) - 2i(x + iy) = 1 + i$. Dobili smo sistem dveh enačb, $x + 2y = 1$, $-y - 2x = 1$. Sistem rešimo in dobimo $x = -1$ in $y = 1$. Sledi $z = -1 + i$.

b) Zopet zapišimo $z = x+iy$, kjer je $x, y \in \mathbb{R}$. Enačba b) preide v $(x-iy)-i(x+iy)^2 = 0$. Dobili smo sistem dveh enačb, $x - 2xy = 0$, $-y - x^2 + y^2 = 0$. Iz prve enačbe sledi $x(2y - 1) = 0$, oziroma, da je $x = 0$ ali pa $y = -\frac{1}{2}$. Tako dobimo rešitve $(x, y) = (0, 0)$, $(x, y) = (0, 1)$, $(x, y) = (\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, iz česar sledi, da je $z \in \left\{0, i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right\}$.

c) Ker je $z\bar{z} = |z|^2$, dobimo $|z|^2 = -1$, kar je protislovje. Sledi, da enačba nima rešitev.

d) Vzamimo $z = x + iy$. Vstavimo v $z = 1 + \bar{z}$, in dobimo $(x + iy) = 1 + (x - iy)$. Dobili smo sistem dveh enačb, $0 \cdot x = 1$, $2y = 0$. Sistem je očitno nerešljiv. $\square$

Naloga 2.2.2. *Reši splošno kvadratno enačbo $z^2 = w$ nad kompleksnimi števili.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

$\square$

2.3 Množice v kompleksni ravnini

Naloga 2.3.1. *Določi naslednje podmnožice kompleksne ravnine*

a) $\|z\| = 1$	*b)* $\|z - 3 + 2i\| \leq 2$
c) $\mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z^2) = 2$	*d)* $\|z - 2\| \leq \|z\|$

Rešitev:

a) Množica točk je očitno krožnica s središčem v koordinatnem izhodišču in polmerom 1.
b) Množica točk $|z - 3 + 2i| \leq 2$ predstavlja množico kompleksnih števil, ki se od števila $3 - 2i$ razlikujejo za manj kot 2. To predstavlja notranjost in rob kroga s središčem v $3-2i$ in polmerom 2.
c) če zapišemo, da je $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, sledi $z^2 = x^2 + 2ixy - y^2$. Zamenjamo v zgornji enačbi in dobimo naslednjo enačbo

$$x + 2xy = 2\,.$$

Rešitve so vse točke, ki ležijo na hiperboli $y = \frac{2-x}{2x}$.
d) če zapišemo, da je $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, neenakost preide v $|x + iy - 2| \leq |x + iy|$, oziroma $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. Ker sta obe strani neenakosti pozitivni, jih lahko kvadriramo in po poenostavitvi dobimo neenakost $x \geq 1$. Zatorej so vsa kompleksna števila, ki rešijo neenakost $|z - 2| \leq |z|$ tista, katerih realni del je večji ali enak 1. Množica kompleksnih števil, ki ustrezajo tej neenakosti ležijo v delu kompleksne polravnine, desno od premice (in na premici) $\mathfrak{Re}(z) = 1$. (Seveda si lahko množico kompleksnih števil $|z-2| \leq |z|$ predstavljamo tudi kot tista kompleksna števila, ki se od 2 razlikujejo za manj kot od 0.) $\square$

2.4 Polarni zapis kompleksnega števila

Naloga 2.4.1. *Naj bosta* $z = 1 + i$ *in* $w = -\sqrt{3} + i$ *kompleksni števili.*

- *Izračunaj* w^{12}. *Zapiši tudi prvih nekaj potenc števila* z *in jih nariši.*
- *"Grafično" izračunaj produkt* zw.

Naloga 2.4.2. *Izračunaj in nariši pete korene števila* $1 + i$ *ter četrte korene števila* $1 + i\sqrt{3}$.

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 2.4.3. *Poišči vse kompleksne rešitve enačbe*

$$(z-1)^{10} = z^{10}\ .$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 2.4.4. *Dokaži, da je* $\arctan(1/2) + \arctan(1/3) = \pi/4$.

Rešitev:
Vemo da se pri množenju dveh kompleksnih števil njuna argumeta seštejeta in njune absolutne vrednosti zmnožijo. Zato vzamemo $z_1 = 2 + i$ in $z_2 = 3 + i$ (njuna argumenta sta ravno $\arctan(1/2)$ in $\arctan(1/3)$). Njun produkt je $z_1 z_2 = 5 + 5i$, čigar argument je

$$\arctan(1) = \pi/4.$$

□

Naloga 2.4.5. *Naj bosta* $a > 0$ *in* $b > 0$ *pozitivni števili. Skiciraj krivuljo v kompleksni ravnini, ki je podana z enačbo*

$$z(t) = e^{(a+ib)t}\ .$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

2.5 Splošne transformacije kompleksne ravnine

Naloga 2.5.1. *Opiši geometrijski pomen naslednjih preslikav kompleksne ravnine vase.*

$$
\begin{array}{llll}
a) & f(z) = z + w\ , & & w \in \mathbb{C} \\
b) & f(z) = \alpha z\ , & & \alpha \in \mathbb{R} \\
c) & f(z) = ze^{i\frac{\pi}{2}} & &
\end{array}
$$

Rešitev:
a) Premik za vektor w.
b) Radijalni razteg ravnine za faktor $\alpha \in \mathbb{R}$.
c) Zasuk za kot $\frac{\pi}{2}$. □

Naloga 2.5.2. *Kam preslikajo spodnje preslikave kompleksne ravnine območje*

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C}, \quad \mathfrak{Re}(z) \geq 0 \quad \text{in} \quad 0 < \mathfrak{Arg}(z) \leq \tfrac{\pi}{4} \right\} \text{ č}$$

$$
\begin{array}{llll}
a) & z \longmapsto z + 1 + 2i & b) & z \longmapsto 2z \\
c) & z \longmapsto ze^{i\frac{\pi}{4}} & d) & z \longmapsto zi \\
e) & z \longmapsto z^2 & f) & z \longmapsto \sqrt{z}
\end{array}
$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 2.5.3. *Zapiši preslikavo kompleksne ravnine* $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *ki bo ravnino zavrtela okoli izbrane točke* $w \in \mathbb{C}$ *za izbrani kot* φ.
Posebej: Katero točko dobimo, če zavrtimo točko $4 + 4\sqrt{3}i$ *okoli točke* $3 + 3i$ *za kot* $\frac{\pi}{6}$ *č*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 2.5.4. *Zapiši splošno formulo zaporedja, katerega* n*-ti člen je* $\mod (n, 4)$*–ti četrti koren števila* -16.

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

2.6 Lomljene linearne transformacije

Naloga 2.6.1. *Lomljena linearna transformacija* $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *preslika*

$$2 \mapsto 0, \quad 1+i \mapsto 1 \quad \textit{in} \quad \infty \mapsto -i.$$

1. *Poišči predpis za ta* φ.
2. *Kam preslika* φ *območje*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-1| > 1, |z-2| < 2\}\check{c}$$

Skiciraj območji D *in* $\varphi(D)$*!*

Rešitev:

1. Naj bo $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Ker mora preslikava slikati $\infty \mapsto -i$, sledi, da je $\frac{a}{c} = -i$. Iz pogoja $2 \mapsto 0$ dobimo $2a + b = 0$, oziroma $b = -2a = 2ci$. Ker $1 + i \mapsto 1$, po krajšem računu sledi $d = 0$. Vstavimo v predpis za preslikavo φ in dobimo $\varphi(z) = \frac{-iz+2i}{z} = -i + \frac{2i}{z}$.
2. Območje D je kolobar med krožnicama $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, kjer ima $\mathcal{K}_1$ središče v v točki 1 in polmer 1, $\mathcal{K}_2$ pa središče v v točki 2 in polmer 2.

   Ker lomljene linearne transformacije slikajo vsako krožnico v krožnico ali premico, je dovolj, da si na vsaki od krožnic $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ izberemo po 3 točke in jih preslikamo s preslikavo φ. Poračunamo: $\varphi(0) = \infty$, $\varphi(1 + i) = 1$, $\varphi(2) = 0$, $\varphi(2 + 2i) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$, $\varphi(2 + 2i) = -\frac{i}{2}$. Iz tega sklepamo, da preslikava φ slika krožnico $\mathcal{K}_1$ na premico $\mathfrak{Im}(z) = 0$ in krožnico $\mathcal{K}_2$ na premico $\mathfrak{Im}(z) = -\frac{1}{2}$. Ker je (denimo) $\varphi(3) = -\frac{i}{3}$, slika preslikava φ kolobar med krožnicama $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ v pas $\left\{z \in \mathbb{C};\ -\frac{1}{2} < \mathfrak{Im}(z) < 0\right\}$.

□

Naloga 2.6.2. *Dokaži, da je lomljena linearna transformacija natančno določena s sliko treh točk v kompleksni ravnini.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 2.6.3. *Poišči lomljeno linearno transformacijo, ki preslika točko* i *v neskončnost, neskončnost v* 2*, točko* $1 + 3i$ *pa v točko* $1 + i$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 2.6.4. *Poišči lomljeno linearno transformacijo, ki preslika izhodišče kompleksne ravnine v točko* $z_1 = 1$*, neskončnost v izhodišče, točko* i *pa v točko* $z_3 = 1 + i$ *Namig: Kaj ko bi najprej poizkal inverzč*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 2.6.5. *Poišči lomljeno linearno transformacijo, ki preslika točko* 1 *v* i*, točko* $1 + i$ *v* 3*, točko* i *pa v točko* $1 - i$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 2.6.6. *Oglej si delovanje preslikave* $\varphi : z \mapsto 1/z$ *na kompleksni ravnini (Riemannovi sferi). Kam preslikava* φ *preslika območje* $D = \{z \in \mathbb{C}; \quad \mathfrak{Im}(z) > 0\}$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 2.6.7. *Kam preslika preslikava* $\varphi : z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$ *območje*

$$D = \{z \in \mathbb{C}; \quad \mathfrak{Re}(z) > 0 \text{ in } \mathfrak{Im}(z) > 0\}$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 2.6.8. *Določi območje kompleksne ravnine, kamor preslikava* $\varphi : z \mapsto \frac{6i+3iz}{2-z}$ *preslika območje*

$$D = \{z \in \mathbb{C}; \quad 1 < |z| < 2\}$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 2.6.9. *Določi območje kompleksne ravnine, kamor preslikava* $\varphi: z \mapsto \frac{z-10}{2z-5}$ *preslika območje*

$$D = \{z \in \mathbb{C}; \quad 0 < \mathfrak{Im}(z) < \mathfrak{Re}(z)\}.$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 2.6.10. *Kam preslika preslikava* $\varphi: z \mapsto \frac{2z-6}{z+3}$ *območje*

$$D = \{z \in \mathbb{C}; \quad \mathfrak{Re}(z) > 0 \text{ in } |z-5| > 4\}$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 2.6.11. *Naj bosta A in B podmnožici kompleksne ravnine, podani z naslednjima pogojema.*

$$A = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z+i| > \sqrt{2} \ \text{ in } \ |z| < 1\}$$
$$B = \{z \in \mathbb{C}\,;\ 0 < \mathrm{Re}(z) < \mathrm{Im}(z)\}$$

1. *Skiciraj množici A in B.*
2. *Najdi lomljeno linearno transformacijo kompleksne ravnine, ki preslika množico A na množico B.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 2.6.12. *Poišči lomljeno linearno transformacijo kompleksne ravnine, ki preslika območje* $D = \{z \in \mathbb{C}; \quad |z-2| < 2 \text{ in } |z-1| > 1\}$ *na obmocje* $D' = \{z \in \mathbb{C}; \quad 0 < \mathfrak{Im}(z) < 1\}$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 2.6.13. *Podano je naslednje območje v kompleksni ravnini:*

$$D = \{z \in \mathbb{C}\,;|1+2i-z| < 2\} \cap \{z \in \mathbb{C}\,;|z-1-i| > 1\}\,.$$

1. *Poišči lomljeno linearno transformacijo kompleksne ravnine, ki bo preslikala točko* $1+4i$ *v* 0*, točko* $1+2i$ *v* 1*, točko* 1 *pa v neskončnost.*

2. *Naj bo* φ *preslikava, ki si jo poiskal pri prejšnji točki in* $D' = \varphi(D)$ *slika območja* D *s preslikavo* φ*. Skiciraj območje* D'*.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

3 Vrste

Naloga 3.0.14. *Ugotovi, ali naslednje vrste konvergirajo:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}$

   Namig: Uporabi dejstvo, da je $\sin x < x$ *za pozitivne* x.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+a}}$, $a > 0$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

   Namig: Uporabi lastnost logaritemske funkcije, da je $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$.

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 3.0.15. *S pomočjo integralskega kriterija pokaži, da*

1. *vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *divergira,*
2. *vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *konvergira,*
3. *vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ *konvergira.*

Kaj lahko sedaj poveš o konvergenci naslednjih vrstč

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

3.1 Vrste s pozitivnimi členi

Naloga 3.1.1. *Izračunaj vsote naslednjih vrst:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2} - \sqrt[n+1]{2}\right)$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10}{3^n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{2n-1}}$

Rešitev:

1. Vsoto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ lahko zapišemo kot $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Zapišemo delno vsoto in ugotovimo, da se veliko členov pokrajša. Limita delnih vsot je enaka 1.
2. Delno vsoto $S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt[i]{2} - \sqrt[i+1]{2}\right)$ izračunamo in dobimo $2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - ... - \sqrt[n+1]{2}$. Limitiramo $n \to \infty$ in zaključimo, da je vsota enaka 2.
4. Računamo:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{2n-1}} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{9^n} - 3$$
Po seštevanju geometrijske vrste dobimo rezultat $\frac{6}{7}$.

□

Naloga 3.1.2. *Ugotovi, katere od spodnjih vrst konvergirajo:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 3.1.3. *Z uporabo korenskega kriterija razišči konvergenco naslednjih vrst:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{n}}{3^n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 3.1.4. *Katere od spodnjih vrst konvergirajo absolutno, katere le pogojno in katere divergirajo?*

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3}$

2. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k-\sqrt{k}}$

3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^{k+1}}{2^k+1}$

4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^{k+1}}{2^k k+1}$

Rešitev:

□

Naloga 3.1.5. *Za katera realna števila d vrsta*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{d^m}{\sqrt{m}}$$

konvergira? Kdaj konvergira absolutno? Kdaj le pogojno?

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 3.1.6. *Prepričaj se, da vrsta*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$$

absolutno konvergira, in jo seštej!
Namig: Upoštevaj

$$\frac{n+1}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \Big(\underbrace{\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{n\text{-krat}}\Big)$$

in vsoto razbij na vsoto več geometrijskih vrst.

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 3.1.7. *Dokaži, da velja*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos n\alpha = \frac{1 - q\cos\alpha}{1 - 2q\cos\alpha + q^2}$$

za vse $q \in (-1, 1)$, ter, da vrsta v tem primeru konvergira absolutno. Kaj lahko poveš o konvergenci, ko je $q = \pm 1$č
Namig: $e^{in\alpha} = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$.

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

3.2 Vrste s členi v $\mathbb{R}$

Naloga 3.2.1. *Dana je vrsta*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n a^n}{2^n}.$$

1. *Za katera realna števila a vrsta konvergirač*
2. *Izračunaj vsoto te vrste, ko konvergira.*
3. **(dodatno)** *Utemelji, zakaj lahko pri zgornji vrsti zamenjamo vrstni red seštevanja.*

Rešitev:
Kadar vrsta absolutno konvergira, lahko vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n a^n}{2^n}$ zapišemo kot $\sum_{n=1}^{\infty} 3\frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n}{2^n}$. Tako smo dobili vsoto dveh geometrijskih vrst. Prva vrsta konvergira, druga pa konvergira, kadar velja $|\frac{-a}{2}| < 1$, torej $a \in (-2, 2)$. □

3.3 Splošne funkcijske vrste

Naloga 3.3.1.

1. *Pokaži, da je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ konvergentna. (Možni pristop: Vrsto primerjaj z vrsto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.)*
2. *Pokaži, da je vrsta $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}x}$ enakomerno konvergentna na intervalu $[1, \infty)$.*
3. *Pokaži, da je f zvezna funkcija na intervalu $[1, \infty)$.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 3.3.2. *Podana je funkcija* $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{10^n}$.

1. *Pokaži, da je vrsta absolutno in enakomerno konvergira.*
2. *Izračunaj* $f(0)$ *in* $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
3. *Pokaži, da je* f *zvezna in omejena funkcija na* $\mathbb{R}$.

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 3.3.3. *Naj bo* $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)$.

1. *Pokaži, da je vrsta konvergentna na intervalu* $[0, 1]$.
2. *Izračunaj vsoto na* $[0, 1]$.
3. *Ali je vrsta* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)$ *tudi enakomerno konvergirač*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 3.3.4. *S pomočjo intergracije izračunaj vsoto vrste* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$.

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 3.3.5.
Naj bo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, 2 \, n \, x^{2n}$.

1. *Pokaži, da vrsta (absolutno) konvergira za vse* x, $|x| < 1$.
2. *Pokaži, da vrsta enakomerno konvergira za vse* x, $|x| < \frac{1}{2}$.
3. *Izračunaj njeno vsoto za* $|x| < \frac{1}{2}$.

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 3.3.6. *Pokaži, da vrsta* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ *konvergira za vse* x, $|x| < 1$ *in jo seštej. (Namig: ali lahko vrsto odvajašč)*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 3.3.7. *Izračunaj vsoto vrste*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^{n+1}}\,.$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

3.4 Potenčne vrste

Naloga 3.4.1. *Poišči interval, na katerem konvergirajo spodnje vrste! Najprej izračunaj konvergenčni polmer (saj gre za potenčne vrste), nato pa preveri obnašanje vrste na robovih intervala konvergence, ki ga določa konvergenčni polmer.*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n\,2^n} \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,x^n \qquad c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n\,\log(n)}{n}$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 3.4.2. *Spodnji vrsti izrazi z elementarnimi funkcijami (seštej ju).*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}\,(x-1)^n}{n}$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

3.5 Taylorjeva vrsta

Naloga 3.5.1. *Razvij spodnje funkcije v Taylorjevo vrsto okoli predpisane točke. Za vsako od vrst ugotovi tudi območje konvergence.*

$a)\ f(x) = e^{-x^2}$	okoli	$x_0 = 0$
$b)\ g(x) = \dfrac{1}{2-3x+x^2}$	okoli	$x_0 = 0$
$c)\ h(x) = \sin^2(x)\,\cos(x)$	okoli	$x_0 = 0$
$d)\ u(x) = \sin(x)$	okoli	$x_0 = \pi/4$
$e)\ v(x) = \dfrac{x}{x-1}$	okoli	$x_0 = 2$
$f)\ t(x) = \dfrac{x-3}{(x+1)^2}$	okoli	$x_0 = 3$
$g)\ \psi(x) = (1+e^x)^2$	okoli	$x_0 = 0$
$h)\ \rho(x) = x^2 - x + 1$	okoli	$x_0 = 1$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 3.5.2. *Razvij funkciji*

$$f(x) = \arctan(x) \qquad \text{in} \qquad g(x) = \log\left(1 + 3x + 2x^2\right)$$

v Taylorjevo vrsto okoli izhodišča.
Namig: Morda bo najbolje funkciji najprej odvajati, nato odvoda razviti v Taylorjevo vrsto in na koncu dobljeni vrsti integrirati.

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 3.5.3. *S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj limiti*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x) - x}{x - \sin(x)} \qquad \text{in} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{\left(\arctan(x-1)\right)^2} \, .$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 3.5.4. *Izračunaj integral*

$$\int_0^1 e^{-x^2} \, dx \, .$$

Rezultat lahko pustiš v obliki številske vrste.

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

3.6 Fourierjeve vrste

Naloga 3.6.1. *Za polinoma p in q z realnimi koeficienti definiramo njun skalarni produkt kot*

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x\,.$$

Naj bo $P_0(x) = 1$.

1. *Določi takšen linearni polinom $P_1(x)$ in tak kvadratni polinom $P_2(x)$, da bodo P_0, P_1 in P_2 tvorili ortogonalni sistem. Pri tem naj velja še $P_1(0) = P_2(0) = 1$.*
2. *Izrazi polinom $q(x) = -12x^2 + 8x + 3$ kot $q(x) = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + a_2P_2(x)$, torej izračunaj koeficiente a_0, a_1 in a_2 v tem razvoju.*

Naloga 3.6.2.

1. *Funkcijo $f(x) = \sin x$ razvij v Fourierjevo vrsto za $x \in [-\pi, \pi]$.*
2. *Funkcijo $f(x) = \sin x$ razvij v Fourierjevo vrsto za $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.*

Naloga 3.6.3. *Funkcijo $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$ razvij v Fourierjevo vrsto za $x \in [-\pi, \pi]$.*

Naloga 3.6.4. *Funkcijo $f(x) = x$ razvij v Fourierjevo vrsto za $x \in [-\pi, \pi]$.*

Naloga 3.6.5. *Funkcijo $f(x) = x^2$ razvij v Fourierjevo vrsto za $x \in [-\pi, \pi]$.*

Naloga 3.6.6. *S pomočjo tega razvoja izračunaj vsoti vrst*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2} \quad \text{in} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,.$$

4 Vunkcije več spremenljivk

4.1 Osnovni pojmi: definicijska območja, zveznost, limita ...

4.2 Lokalni ekstremi

Naloga 4.2.1. *Določi vse lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.*

Naloga 4.2.2. *Pokaži, da ima funkcija $f(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$ neskončno mnogo lokalnih maksimumov, a nobenega lokalnega minimuma.*

4.3 Globalni ekstremi, vezani ekstremi

Naloga 4.3.1. *Določi največjo in najmanjšo vrednost, ki jo zasede funkcija $f(x,y) = y - x^2y$ na območju $x^2 + 4y^2 \leq 4$.*

Naloga 4.3.2. *Poišči največjo in najmanjšo vrednost, ki jo lahko zavzame funkcija $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ na krogu z enačbo $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$.*

Naloga 4.3.3. *Poišči točko na paraboli $y^2 = 4x$, ki je najbližja točki $(1,0)$.*

Naloga 4.3.4. *Na voljo imamo l metrov dolgo tanko palico. Iz nje izrežemo 12 krajših palic, iz katerih je mogoče sestaviti ogrodje kvadra.*

1. *Izračunaj, kako dolge stranice kvadra moramo izrezati, da bomo dobili kvader z največjo možno površino.*
2. *Na kakšne kose moramo razrezati palico, da bo ploščina osnovne ploskve kvadra enaka A, kvader z izrezanim skeletom pa bo imel največji možni volumen?*

Naloga 4.3.5. *Skupina za analizo učinkovitosti v nekem programerskem podjetju je po večletnih opazovanjih prišla do sklepa, da mero učinkovitosti posameznega programerja, ki x ur programira in y ur vzdržuje že obstoječo kodo dobro opisuje formula*

$$u(x, y) = \sqrt{x} + 5\sqrt{y}\ .$$

Programer mora na nekem projektu opraviti 52 *ur dela. Koliko dela naj posveti razvoju novosti in koliko vzdrževanju že obstoječe kode, da bo glede na zgornjo formulo kar najbolj učinkovit?*