1. IZPIT IZ TEORIJE DS, NEKAJ REŠITEV

(1e) Denimo, da izjavni izraz I nastopa v J, pa tudi, da izjavni izraz J nastopa v I; pri tem "nastopati v" pomeni "pojaviti se v konstrukcijskem drevesu".

Pokazati je potrebno, da je $I = J$. Dokazujmo s protislovjem in privzemimo, da $I \neq J$. Ker se I pojavi v J, lahko I najdemo v konstrukcijskem drevesu izjavnega izraza J (in ne na mestu J-ja, saj nista enaka). To pa pomeni, da izraz I vsebuje strogo manj izjavnih veznikov kot J (ali pa se ga da zapisati s strogo manj znaki, ipd.). Analogno, izjavni izraz J vsebuje strogo manj izjavnih veznikov kot I. Oboje skupaj, I vsebuje strogo manj veznikov kot I, pa je absurdno.

(2d) Po definiciji potenčne množice za *vsako* množico A velja $A \in \mathcal{P}A$. Vprašanje pa se dotika zveze

$$A \subseteq \mathcal{P}A \tag{1}$$

Prazna množica $\emptyset$ je množica, ki je podmnožica *vsake* množice, tudi $\mathcal{P}\emptyset$, torej ustreza zvezi (1).

Z neprazno množico A, ki ustreza zvezi (1), so sitnosti. Če je namreč $x \in A$, potem velja tako $\{x\} \in \mathcal{P}A$ (po definiciji potenčne množice) kot tudi $x \in \mathcal{P}A$, slednje zaradi (1). Odtod sledi, da je $x \subseteq A$.

Sklepamo, da je vsak element množice A, ki ustreza (1), tudi njena podmnožica. To pa je nemogoče.

Vse točke pri tem podvprašanju ste dosegli že z opazko o prazni množici.

(2e) Množica A ima *strogo manj* elementov kot množica $\mathcal{P}A$ (tudi, če je A neskončna, kjer sicer ne govorimo o številu elementov, temveč uporabljamo nekoliko drugačno terminologijo), zato za *nobeno* množico ne velja zveza $\mathcal{P}A \subseteq A$.

(3d) V resnici ni potrebno ločiti primerov, ko sta p in q enaki oziroma različni praštevili: $\gcd(p, q)$ namreč deli p (zakaj? preberi naglas.) in p deli produkt pq.

(3e) Če je $p = q$, potem enačbo enakovredno prepišemo v $px + py = p^2$. Krajšamo s p in dobimo enačbo

$$x + y = p,$$

ki ima *očitno* $p + 1$ naravnih rešitev (ali $p - 1$, če ne verjamete, da je 0 naravno število).

Če pa je $p \neq q$ je zadeva kanček bolj zapletena. Enačba se v tem primeru glasi

$$px + qy = pq. \tag{2}$$

Desna stran in prvi člen na levi sta deljiva s p, zato mora biti tudi člen qy deljiv s p. Ker pa je $p \neq q$ lahko sklepamo, da p deli y. S simetričnim argumentom sklepamo, da q deli x.

Če naj bosta tako x kot y nenegativna, imamo natanko dve možnosti: $x = 0$, $y = p$ ter $x = q$, $y = 0$.

(4e) Denimo, da lahko permutacijo π pišemo kot produkt transpozicij na naslednji način

$$\pi = \tau_1 * \tau_2 * \tau_3 * \cdots * \tau_k,$$

pri čemer so τ_i, $i = 1, \ldots, k$, transpozicije, ki niso nujno različne. Če je k sodo število, je permutacija π soda, v nasprotnem primeru je liha.

Permutacijo π^2 lahko v tem primeru zapišemo kot produkt transpozicij takole:

$$\pi^2 = \tau_1 * \tau_2 * \tau_3 * \cdots * \tau_k * \tau_1 * \tau_2 * \tau_3 * \cdots * \tau_k$$

Uporabili smo $2 \cdot k$ transpozicij, torej je permutacija π^2 soda.

Analogno sklepamo, da so permutacije π^4, π^6, π^8 in π^{10} sode permutacije (ne glede na parnost permutacije π).