Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

13. oktober 2008

Naloga

Poišči izjavni izraz s predpisano resničnostno tabelo:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Disjunktivna normalna oblika

Disjunktivna normalna oblika (DNO) izjavnega izraza A je izjavni izraz A_{DNO}, za katerega velja:

- $A \sim A_{DNO}$
- A_{DNO} je disjunkcija osnovnih konjunkcij.

Osnovna konjunkcija je konjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij.
A_{DNO} *lahko* zgradimo tako, da za vsak nabor pravilnostne tabele, pri katerem je izraz A resničen, pripravimo eno osnovno konjunkcijo. V njej nastopajo v tem naboru resnične spremenljivke in negacije v tem naboru lažnih spremenljivk.

Konjunktivna normalna oblika

Konjunktivna normalna oblika (KNO) izjavnega izraza A je izjavni izraz A_{KNO}, za katerega velja:

- $A \sim A_{KNO}$
- A_{KNO} je konjunkcija osnovnih disjunkcij.

Osnovna disjunkcija je disjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij.
A_{KNO} *lahko* zgradimo tako, da za vsak nabor pravilnostne tabele, pri katerem je izraz A neresničen, pripravimo eno osnovno disjunkcijo. V njej nastopajo v tem naboru lažne spremenljivke in negacije v tem naboru resničnih spremenljivk.

Kdaj KNO in DNO

Trditev

Vsak izjavni izraz, ki ni protislovje, ima DNO.
Vsak izjavni izraz, ki ni tavtologija, ima KNO.

Posledica

Za vsak izjavni izraz A obstaja enakovreden izjavni izraz B, ki vsebuje samo veznike $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Polni nabori izjavnih veznikov

Družina izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ je *poln nabor*, če za vsak izjavni izraz A obstaja enakovreden izjavni izraz B, ki vsebuje samo veznike iz $\mathcal{N}$.
$\{\neg, \wedge, \vee\}$ je poln nabor izjavnih veznikov.

Polni nabori izjavnih veznikov

Nekaj drugih polnih naborov izjavnih veznikov:

$$\{\neg, \vee\}\ , \quad \{\neg, \wedge\}, \quad \{\neg, \Rightarrow\}\ , \quad \{0, \Rightarrow\}$$

Polni nabori izjavnih veznikov

Vprašanje:
Kako v praksi pokazati, da je nabor izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ poln?

1. Izberemo znan poln nabor izjavnih veznikov $\mathcal{Z}$.
2. Vsak veznik iz znanega nabora $\mathcal{Z}$ izrazimo samo z uporabo veznikov iz $\mathcal{N}$.

Še trije izjavni vezniki

- ekskluzivna disjunkcija $\veebar$
- Shefferjev veznik $\uparrow$
- Pierce-Lukasiewiczev veznik $\downarrow$

Ekskluzivna disjunkcija

Ekskluzivna disjunkcija izjavnih izrazov A in B, označimo jo z $A \veebar B$, in beremo "*A ekskluzivni ali B*".

$A \veebar B$ je resnična n.t., ko je natanko eden od izjavnih izrazov A in B resničen.

Definirana je z naslednjo pravilnostno tabelo:

A	B	$A \veebar B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Velja tudi $A \veebar B \sim \neg(A \Leftrightarrow B)$

Shefferjev veznik

Shefferjev veznik povezuje dva izraza A in B, kar označimo z $A \uparrow B$. Shefferjevemu vezniku pravimo tudi veznik NAND.
$A \uparrow B$ je neresničen n.t., ko sta oba izjavna izraza A in B resnična.
Definiran je z naslednjo pravilnostno tabelo:

A	B	$A \uparrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Velja tudi $A \uparrow B \sim \neg(A \wedge B)$

Pierce-Lukasiewiczev veznik

Pierce-Lukasiewiczev veznik povezuje dva izraza A in B, kar označimo z $A \downarrow B$. Pravimo mu tudi veznik NOR.
$A \downarrow B$ je resničen n.t., ko sta oba izjavna izraza A in B neresnična.
Definiran je z naslednjo pravilnostno tabelo:

A	B	$A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Velja tudi $A \downarrow B \sim \neg(A \vee B)$

Kam jih uvrstimo po prednosti

Ekskluzivna disjunkcija veže tako močno kot (navadna) disjunkcija.

$$A \vee B \veebar C \vee D$$

pomeni isto kot

$$((A \vee B) \veebar C) \vee D$$

Kam jih uvrstimo po prednosti

Shefferjev in Pierce-Lukasiewiczev veznik vežeta tako močno kot konjunkcija.

$$A \uparrow B \wedge C \downarrow D \uparrow E$$

pomeni isto kot

$$((((A \uparrow B) \wedge C) \downarrow D) \uparrow E$$

Zakoni z novimi vezniki

ekskluzivna disjunkcija	$A \veebar B \sim \neg(A \Leftrightarrow B)$
	$A \veebar B \sim B \veebar A$
	$(A \veebar B) \veebar C \sim A \veebar (B \veebar C)$
Shefferjev veznik	$A \uparrow B \sim \neg(A \wedge B)$
	$A \uparrow B \sim B \uparrow A$
Pierceov veznik	$A \downarrow B \sim \neg(A \vee B)$
	$A \downarrow B \sim B \downarrow A$