Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

20. oktober 2008

Sklepanje v izjavnem računu

Predpostavke:	1.	*Ta žival ima krila ali pa ni ptič.*
	2.	*Če je ta žival ptič, potem leže jajca.*
	3.	*Ta žival nima kril.*
Zaključek:	4.	*Torej ta žival ne leže jajc.*

Ali je ta sklep pravilen?

Formalizacija

ta žival ima krila	...	k
ta žival je ptič	...	p
ta žival leže jajca	...	j

$$
\begin{array}{ll}
1. & k \vee \neg p \\
2. & p \Rightarrow j \\
3. & \neg k \\
\hline
4. & \neg j
\end{array}
$$

Pravilen sklep

Zaporedje izjavnih izrazov $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ je *pravilen sklep* s *predpostavkami* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in *zaključkom* B, če je zaključek B resničen pri vseh tistih naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerih so resnične vse predpostavke.

Pišemo: $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$

in beremo:
Iz predpostavk $A_1, A_2, \ldots, A_n$ logično sledi zaključek B.

Pravilen sklep

Izrek
$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ *natanko tedaj, ko*
$\models (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$

Nepravilen sklep

Kako pokažemo, da sklep ni pravilen?

Poiščemo *protiprimer*, tj. nabor vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerem so vse predpostavke resnične, zaključek pa ne.

Nepravilen sklep

Z izbiro nabora $k \sim 0$, $p \sim 0$ in $j \sim 1$ pridelamo:

$$\begin{array}{rcl} k \vee \neg p & \sim & 1 \\ p \Rightarrow j & \sim & 1 \\ \neg p & \sim & 1 \qquad \text{in} \\ \neg j & \sim & 0 \end{array}$$

Pravila sklepanja

$A, A \Rightarrow B \models B$	*modus ponens* (MP)
$A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$	*modus tollens* (MT)
$A \vee B, \neg B \models A$	*disjunktivni silogizem* (DS)
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$	*hipotetični silogizem* (HS)
$A, B \models A \wedge B$	*združitev* (Zd)
$A \wedge B \models A$	*poenostavitev* (Po)
$A \models A \vee B$	*pridružitev* (Pr)

Pravilom sklepanja pravimo tudi *osnovni pravilni sklepi*.

Pravilnost sklepa

Pravilnost sklepa $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ pokažemo tako, da sestavimo zaporedje izjavnih izrazov $C_1, C_2, \ldots, C_m$, kjer je $C_m = B$ in za $i = 1, 2, \ldots, m$ velja:

(a) C_i je ena od predpostavk ali

(b) C_i je tavtologija ali

(c) C_i je enakovreden enemu od predhodnih izrazov v zaporedju ali

(d) C_i logično sledi iz predhodnih izrazov po enem od osnovnih pravilnih sklepov.

Zgled pravilnega sklepa

Ali iz predpostavk $p \Rightarrow q, p \vee r, q \Rightarrow s, r \Rightarrow t, \neg s$ sledi t?

Še en primer pravilnega sklepa

Ali iz predpostavk $p, \neg p$ sledi q?

Pogojni sklep

Pogojni sklep (PS) uporabljamo, kadar ima zaključek sklepa obliko implikacije.

Izrek

$A_1, A_2, \ldots, A_k \models B \Rightarrow C$ natanko tedaj, ko
$A_1, A_2, \ldots, A_k, B \models C$.

Zgled

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ in $\neg r$ logično sledi zaključek $p \Rightarrow q$.

Sklep s protislovjem

Sklep s protislovjem (RA) lahko uporabljamo kadarkoli.

Izrek
$A_1, A_2, \ldots, A_k \models B$ *natanko tedaj, ko*
$A_1, A_2, \ldots, A_k, \neg B \models 0.$

Zgled

Pokaži, da iz $p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)$, $s \wedge q \Rightarrow r$ in s sledi $\neg p$.

1.	$p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)$	predpostavka
2.	$s \wedge q \Rightarrow r$	predpostavka
3.	s	predpostavka
4.1.	$\neg\neg p$	predpostavka RA
4.2.	p	$\sim$4.1
4.3.	$\neg(q \Rightarrow r)$	MP(1,4.2)
4.4.	$q \wedge \neg r$	$\sim$4.3
4.5.	q	Po(4.4)
4.6.	$\neg r$	Po(4.4)
4.7.	$s \wedge q$	Zd(3,4.5)
4.8.	r	MP(2,4.7)
4.9.	$r \wedge \neg r \sim 0$	Zd(4.8,4.6)
4.	$\neg p$	RA(4.1,4.9)

Analiza primerov

Analizo primerov (AP) lahko uporabljamo, kadar ima ena od predpostavk obliko disjunkcije.

Izrek

$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1 \vee B_2 \models C$ *natanko tedaj, ko*

$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1 \models C$ *in*

$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_2 \models C$.

Dvojiški seštevalnik

Radi bi konstruirali vezje, ki zna sešteti dve števili v dvojiškem zapisu.

Naravno število zapisano v dvojiškem sestavu smemo interpretirati kot zaporedje ničel in enic, oziroma kot zaporedje logičnih vrednosti.

1. sumand x	23		10111
$+$2. sumand y	$+26$		+11010
rezultat z	49		110001