Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

27. oktober 2008

Predikatni račun

Predpostavki:	*Vsi študentje računalništva znajo logično sklepati.*
	Škrat Kuzma ne zna logično sklepati.
Zaključek:	*Škrat Kuzma ni študent računalništva.*

Področje pogovora in predikati

Področje pogovora je neprazna *množica* iz katere izbiramo *individualne konstante*.
Predikati so logične *funkcije*, ki za svoje argumente lahko dobijo individualne konstante iz področja pogovora.
Če v predikate vstavljamo (individualne) konstante, dobimo *izjave*.

Spremenljivke in formule

V predikatnem računu bomo za spremenljivke uporabljali črke $x, y, z, \ldots$
V predikate lahko, namesto konstant, vstavljamo tudi spremeljivke.
Na ta način pridelamo *formule*. Formule niso nujno izjave.

Kvantifikatorja

Poznamo dva kvantifikatorja:

$\forall$	univerzalni kvantifikator
$\exists$	eksistenčni kvantifikator

Kako iz formule naredimo izjavo?

Možna sta dva pristopa.

1. Namesto spremenljivke vstavimo konstanto.
2. Formulo zapremo s kvantifikatorji.

Zgled

Dvomestni predikat $P(x, y)$ naj pomeni x *pozna* y*-ona.*
Na katere načine lahko formulo $P(x, y)$ spremeniš v izjavo?

Izjavne formule

- *spremenljivke* $x, y, z, \ldots,$
- *konstante* $a, b, c, \ldots,$
- *predikati* $P, Q, R, \ldots,$
- izjavni vezniki $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots,$
- *kvantifikatorja* $\forall$ in $\exists$ ter
- oklepaja (in) .

Spremenljivkam in konstantam pravimo tudi *termi*.
Atomi predikatnega računa so, na primer,

$$P(x), P(a), Q(x, y), Q(a, x), \ldots$$

Atome dobimo tako, da terme vstavimo v predikate.

Izjavne formule

Izjavne formule so definirane induktivno:

1. Atomi so izjavne formule
2. Če sta W in V izjavni formuli in je x spremenljivka, potem so tudi

$$\neg(W), (W) \wedge (V), (W) \vee (V), (W) \Rightarrow (V), (W) \Leftrightarrow (V), \ldots$$

$$\exists x\,(W) \quad \text{in} \quad \forall x\,(W)$$

izjavne formule.

Doseg kvantifikatorjev

Doseg kvantifikatorja je *najmanjši možen*: najmanjša izjavna formula, ki jo preberemo desno od kvantifikatorja (skupaj z njegovo spremenljivko).
Kvantifikator *veže* svojo spremenljivko in proste spremenljivke z istim imenom v svojem dosegu.
Formulo brez prostih spremenljivk imenujemo, če imamo izbrano interpretacijo, *izjava*, ali *izjavna shema*, če interpretacija ni določena.

Interpretacija izjavne formule

Interpretacija $\mathcal{I}$ izjavne formule W je sestavljena iz neprazne množice $\mathcal{D}$, ki ji pravimo *področje pogovora* interpretacije.
Poleg tega

- vsakemu predikatu ustreza 0/1 logična funkcija v $\mathcal{D}$ (0-mestnemu predikatu ustreza izjava oziroma njena logična vrednost)
- vsaki konstanti določimo vrednost v $\mathcal{D}$ (ponavadi je implicitno določena že z imenom konstante)
- vsaki prosti spremenljivki v W določimo vrednost v $\mathcal{D}$, pri tem vsem prostim spremenljivkam z istim imenom določimo *isto* vrednost iz $\mathcal{D}$.

Pomen kvantifikatorjev

Naj bo W formula. Z $W(x/a)$ označimo formulo, ki jo dobimo tako, da v formuli W vse proste vstope spremenljivke x nadomestimo z a.

W	$P(x) \vee \exists x\, Q(x, y) \wedge R(b, x)$
$W(x/a)$	$P(a) \vee \exists x\, Q(x, y) \wedge R(b, a)$

Pomen kvantifikatorjev

Formula $\forall x\, W$ je *resnična* v interpretaciji $\mathcal{I}$, če je za vsak element področja pogovora $d \in \mathcal{D}$ resnična formula $W(x/d)$. Sicer je $\forall x\, W$ neresnična.

Formula $\exists x\, W$ je *resnična* v interpretaciji $\mathcal{I}$, če v področju pogovora obstaja $d \in \mathcal{D}$, za katerega je formula $W(x/d)$ resnična. Sicer je $\exists x\, W$ neresnična.

Enakovredne izjavne formule

Izjavni formuli W in V sta *enakovredni*, če imata isto logično vrednost v vseh možnih interpretacijah.
V tem primeru pišemo $W \sim V$.

Enakovredne izjavne formule

Izjavna formula W je *splošno veljavna*, če je resnična v vsaki interpretaciji.
Izjavna formula V je *neizpolnljiva*, če je neresnična v vsaki interpretaciji.

Zgled

Formuli $\neg\forall x\, W$ in $\exists x\, \neg W$ sta enakovredni.