Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

3. november 2008

Zakoni predikatnega računa

So nekateri pomembni pari enakovrednih izjavnih formul:

$$\neg\forall x\, W \sim \exists x\, \neg W$$
$$\neg\exists x\, W \sim \forall x\, \neg W$$

$$\forall x \forall y\, W \sim \forall y \forall x\, W$$
$$\exists x \exists y\, W \sim \exists y \exists x\, W$$

$$\forall x\, (W \wedge V) \sim \forall x\, W \wedge \forall x\, V$$
$$\exists x\, (W \vee V) \sim \exists x\, W \vee \exists x\, V$$

Preimenovanje spremenljivk

Formula

$$\forall x\,(P(w) \Rightarrow P(x))$$

je enakovredna formuli

$$\forall y\,(P(w) \Rightarrow P(y))$$

in ni enakovredna formuli

$$\forall w\,(P(w) \Rightarrow P(w)).$$

Preimenovanje spremenljivk

Trditev

Če se y ne pojavi v W, potem veljata enakovrednosti:

$$\forall x\, W \quad \sim \quad \forall y\,(W(x/y))$$

$$\exists x\, W \quad \sim \quad \exists y\,(W(x/y))$$

Preimenovanje spremenljivk

Želja: če je W formula, potem imen prostih spremenljivk ne smemo spreminjati, če zelimo pridelati enakovredno formulo. Vezane spremenljivke lahko preimenujemo tako, da ista spremenljivka (tj. spremenljivka z istim imenom)

- *ne nastopa pri več kvantifikatorjih*
- *ni hkrati vezana in prosta.*

Zakoni predikatnega računa z omejitvami

Če se x ne pojavi (prosto) v formuli C, potem veljajo naslednje enakovredosti:

$$
\begin{aligned}
\forall x\,(C \vee W) &\sim C \vee \forall x\, W\\
\exists x\,(C \vee W) &\sim C \vee \exists x\, W
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\forall x\,(C \wedge W) &\sim C \wedge \forall x\, W\\
\exists x\,(C \wedge W) &\sim C \wedge \exists x\, W
\end{aligned}
$$

Prenexna normalna oblika

Naj bo W izjavna formula. *Prenexna normalna oblika* izjavne formule W je izjavna formula W_{PNO}, za katero velja:

- W_{PNO} je enakovredna W in
- W_{PNO} ima vse kvantifikatorje na začetku.

Prenexna normalna oblika

Kako do prenexne normalne oblike?

1. Preimenuj vezane spremenljivke v formuli tako, da nobena dva kvantifikatorja ne uporabljata spremenljivke z istim imenom in so imena prostih spremenljivk drugačna od imen vezanih spremenljivk.
2. premakni kvantifikatorje proti levi, pri tem pa, če je potrebno, nadomesti $\Rightarrow$ in $\Leftrightarrow$ z logičnimi vezniki $\neg, \wedge, \vee$.

Prenexna normalna oblika

$$\forall x\, A(x) \vee \exists x\, B(x) \Rightarrow C(x) \wedge \exists x\, C(x)$$

Sklepanje v predikatnem računu

Predpostavke:	*Vsak pes ima rad ljudi ali sovraži mačke.*
	Fido je pes.
	Fido ima rad mačke.
Zaključek:	*Obstaja pes, ki ima rad ljudi.*

Kaj, če interpretacija ni določena.

Pokaži, da je izjavna formula

$$\neg \exists y \forall x (P(x,y) \Leftrightarrow \neg P(x,x))$$

splošno veljavna.

Kako torej sklepamo?

1. Izberemo interpretacijo, če slučajno ni določena.
2. Izjavne formule preoblikujemo tako, da kvantifikatorji nastopajo na začetku. Preimenovanje spremenljivk in prenexna normalna oblika.
3. Odpravimo kvantifikatorje. Formule smemo prilagoditi.
4. Sklepamo kot v izjavnem računu.
5. Uvedemo kvantifikatorje nazaj.
6. Upoštevamo interpretacijo.

Napačno sklepanje v predikatnem računu

$$\forall x \exists y\, P(x, y) \quad \models \quad \exists y \forall x\, P(x, y)$$

Napačno sklepanje v predikatnem računu

$$\exists x\, P(x) \land \exists x\, Q(x) \quad \models \quad \exists x\, (P(x) \land Q(x))$$