Pisni izpit, 21. 9. 1994

1. V trikotniku ABC je težiščnica na stranico $b = \overline{AC}$ pravokotna na nosilko stranice $c = \overline{AB}$. Pokaži, da velja

$$b^2 = a^2 + 3c^2 .$$

2. Izračunaj naslednjo determinanto velikosti $n \times n$:

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} .$$

3. Naj bosta p in q premici v prostoru $\mathbb{R}^3$, podani z enačbama:

$$p\colon\ x = y = z\,, \quad q\colon\ \frac{x}{2} = -y = \frac{z}{3}\,.$$

(a) Naj bo Σ ravnina, ki vsebuje p in q. Določi matriko A, ki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ ustreza zrcaljenju čez ravnino Σ.

(b) Določi matriko B, ki v standarni bazi ustreza zrcaljenju čez premico p.

(c) Za katere točke $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ velja $A\vec{x} = B\vec{x}$? Kaj ta množica pomeni geometrijsko?

4. Določi matriko, ki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ ustreza sebi adjungirani preslikavi $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki ima eno dvojno lastno vrednost 2 in eno lastno vrednost 3. Lastni podprostor za 2 je ravnina $x + 2y - z = 0$.

Pisni izpit, 19. 9. 1995

1. Naj bosta p in q premici v $\mathbb{R}^3$, podani z enačbama

$$p\colon\ x - 1 = \frac{y}{2} = z \quad \text{in} \quad q\colon\ x = y = z\,.$$

Določi premico r, ki seka p in q in gre skozi točko $T(1,2,2)$. Napiši še enačbo ravnine, ki je enako oddaljena od p in q in ju ne seka.

2. Linearna preslikava $T\colon\ M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ je podana s predpisom:

$$T(X) := \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} .$$

Določi njeno matriko v bazi $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ prostora $M_2(\mathbb{R})$, njene lastne vrednosti in lastne vektorje.

3. Obravnavaj in reši naslednji sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned} (3+2\lambda)x + (1+3\lambda)y + \lambda z + (\lambda-1)u &= 3 \\ 3\lambda x + (3+2\lambda)y + \lambda z + (\lambda-1)u &= 1 \\ 3\lambda x + 3\lambda y + 3z + (\lambda-1)u &= 1 \\ 3\lambda x + 3\lambda y + \lambda z + (\lambda-1)u &= 1 \end{aligned}$$

4. V prostoru $P_2(\mathbb{R})$ je dan skalarni produkt

$$(p,q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)\,.$$

Pokaži, da je preslikava

$$F\colon\; P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\,, \quad F(p) = p(0) + 3\int_0^2 p(t)\,dt$$

linearni funkcional in poišči tak polinom q, da bo $F(p) = (p,q)$ za vse $p \in P_2(\mathbb{R})$.

Pisni izpit, 21. 6. 1996

1. Dana je piramida $ABCD$ z oglišči $A(1,-1,1)$, $B(2,1,-3)$, $C(0,2,-1)$ in $D(3,0,1)$. Premica p seka stranici AD in BC pod pravim kotom. Določi tiste točke, v katerih premica p seka koordinatne ravnine.

2. Dan je sistem enačb:

$$\begin{aligned} x - y + 2z - 2u &= 0 \\ 2x - y - bz + u &= 0 \\ 3x - 2y - bz + u &= 2b \\ x - y - 2z - 2au &= 2c \end{aligned}$$

Za katere vrednosti parametrov a, b in c je sistem rešljiv? Kdaj je enolično rešljiv? V tem primeru (ko je enolično rešljiv) poišči rešitev.

3. Določi števila a, b in c tako, da bosta matriki A in B podobni:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & 7 & -3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 & a & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ b & -4 & c \end{bmatrix}.$$

Ali se da matrika B diagonalizirati? Poišči lastne vektorje matrike B.

4. Poišči kakšno ortogonalno transformacijo, ki preslika premico $x+1 = y+1 = z-2$ na premico $\frac{x+1}{2} = y = z-2$.

Pisni izpit, 20. 3. 1997

1. Naj bo dano realno število a in matrika $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$. Množica $\mathcal{C}(A)$ naj vsebuje vse matrike, ki komutirajo z matriko A,

$$\mathcal{C}(A) := \{X \in M_2(\mathbb{R});\; AX = XA\}\,.$$

Pokaži, da je $\mathcal{C}(A) = \mathrm{Lin}\{A, I\}$.

2. Naj bo n dano naravno število. Izračunaj naslednjo determinanto velikosti $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & & \ddots & 0 & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & \dots & n-1 & n \end{bmatrix}.$$

3. Dane so premice

$$q\colon\ x = \frac{y-5}{2},\ z = 3 \quad , \quad r\colon\ -\frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z-5}{2}$$

$$\text{in} \quad p\colon\ 3 - x = \frac{y+2}{2} = z + 1\,.$$

Določi kroglo, ki ima središče na premici p in se dotika premic q in r.

4. V prostoru realnih polinomov stopnje največ tri $P_3(\mathbb{R})$ je dan skalarni produkt

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p(1)q(1) + p'(1)q'(1)$$

(da je to pravilo skalarni produkt, ti ni treba pokazati) in podprostor

$$V := \{p \in P_3(\mathbb{R});\ p(0) = p(1) = 0\}\,.$$

Določi kakšno pravokotno bazo ortogonalnega komplementa $V^{\perp}$.

Pisni izpit, 11. 6. 1997

1. Naj bo $A\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ neničelna linearna preslikava, za katero velja $A^2 = 0$. Pokaži, da velja:

(a) Preslikava A ni obrnljiva.

(b) $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{N}(A)$.

(c) $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{N}(A) \neq \{0\}$.

(d) $\dim(\mathcal{R}(A)) = 1$.

2. Preslikava $T\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kompozitum pravokotne projekcije na ravnino $x + y + z = 0$ in vrtenja v tej ravnini za kot 30^o v eni od smeri. Določi matriko, ki pripada preslikavi T v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

3. V prostoru $\mathbb{R}^4$, ki je opremljen z običajnim skalarnim produktom, je dan podprostor

$$U = \text{Lin}\{(1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,-1,1,1)\}\,.$$

(a) Poišči kakšno ortonormirano bazo prostora U.

(b) Izračunaj pravokotno projekcijo vektorja $(0,1,0,-2)$ na prostor U.

4. Naj bo J realna matrika velikosti $(2n) \times (2n)$:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemer so na praznih mestih ničle, I identična matrika velikosti $(2n) \times (2n)$, $E_{n+1,n}$ pa matrika velikosti $(2n)\times(2n)$, ki ima ničle povsod, razen v križišču $n+1$-ve vrstice in n-tega stolpca. Tam stoji enka. Izračunaj determinanto matrike

$$A = 3I + 2J + J^\top - E_{n+1,n}\,.$$

Pisni izpit, 20. 6. 1997

1. Naj bodo $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ paroma pravokotni vektorji iz prostora $\mathbb{R}^3$, z dolžinami $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ in $|\vec{c}| = 3$. Izračunaj prostornino tetraedra, ki ga napenjajo vektorji

$$\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{c}\,, \quad \vec{q} = \vec{b} + \vec{c} \quad \text{in} \quad \vec{r} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\,.$$

2. Naj bosta A in B linearni preslikavi iz prostora realnih polinomov stopnje največ dva $P_2(\mathbb{R})$ vase. Preslikava A je podana s pravilom

$$(Ap)(t) = 6\int_t^{t+1} p(s)ds - (t+1)p'(t)\,,$$

za preslikavo B pa vemo, da velja

$$B(t+1) = 1,\ B(t^2+t+1) = 0 \quad \text{in} \quad B(1) = t-1\,.$$

Določi matriko, ki pripada preslikavi BA v standardni bazi prostora $P_2(\mathbb{R})$ in določi njeno jedro.

3. Naj bo a realno število in

$$A = \begin{bmatrix} 1-a & a & 2-a & 2 \\ -a & 1+a & 3-a & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Za katera realna števila a lahko matriko A diagonaliziramo? Takrat določi ustrezno diagonalno in prehodno matriko.

4. Naj bosta $\vec{x}$ in $\vec{y}$ vektorja v ravnini $\mathbb{R}^2$, ki je opremljena z običajnim skalarnim produktom. Pokaži, da velja naslednja ekvivalenca. Skalarni produkt vektorjev $\vec{x}$ in $\vec{y}$ je pozitiven natanko tedaj, ko obstaja taka pozitivna matrika $A \in M_2(\mathbb{R})$, da je $A\vec{x} = \vec{y}$.

Pisni izpit, 24. 3. 1998

1. Naj bo A preslikava iz prostora polinomov stopnje največ dva vase, podana s predpisom

$$A\colon\ P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})\,, \quad p(t) \mapsto p(t) + tp'(t) + 6t^2 \int_0^1 p(x)dx\,.$$

(a) Pokaži, da je preslikava A linearna in določi njen rang.

(b) Določi matriko, ki preslikavi A pripada v bazi $\{1 + 2t + 3t^2, 1 + t + 2t^2, t + 2t^2\}$.

2. Med vsemi točkami, ki so enako oddaljene od premic

$$p\colon\ \frac{x-1}{2} = 1 - y,\ z = 3 \quad \text{in} \quad q\colon\ x = y = z$$

poišči tisto, ki je najbližje točki $T(1, 2, 1)$. (*Namig:* Najprej poišči ravnino, ki je enako oddaljena od obeh premic.)

3. V prostoru $\mathbb{R}^3$ z običajnim skalarnim produktom preslikava A zrcali čez premico $p\colon\ x = y = z$. Poišči matriki v standardni bazi za preslikavi A in A^*, določi njune lastne vrednosti in lastne podprostore. Nato opiši geometrični učinek preslikave A^*.

4. Določi tip in osi ploskve v $\mathbb{R}^3$, ki je podana z enačbo

$$-\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{6} + \frac{4}{3}z^2 + \frac{11}{3}xy - \frac{2}{3}xz - \frac{2}{3}yz = 0\,.$$

Pisni izpit, 3. 9. 1998

1. Naj bo t dano realno število in

$$\mathcal{U} := \{A \in M_n(\mathbb{R});\ A^\top = -tA\}\,.$$

Pokaži, da je množica $\mathcal{U}$ podprostor v prostoru realnih matrik velikosti $n \times n$ in določi njegovo razsežnost v odvisnosti od parametra t.

2. Poišči enačbo valja v prostoru $\mathbb{R}^3$, ki ravnino $2x-y+2z = 0$ preseka po krožnici s središčem $(0, 0, 0)$ in polmerom 1.

3. Preslikava F, ki slika iz prostora realnih polinomov stopnje največ dva vase, je podana s predpisom

$$(Fp)(t) := (tp(1 + t))' + t^2p(1/t)\,.$$

Določi matriko v standardni bazi, ki pripada adjungirani preslikavi F^* glede na skalarni produkt

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)\,dt\,.$$

4. Naj bosta A in B linearni preslikavi iz končno razsežnega realnega vektorskega prostora vase.

(a) Če preslikavi A in B komutirata ($AB = BA$) in je $\mathcal{U}$ lastni podprostor za A, je $B(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$.

(b) Če se da preslikava A diagonalizirati in za vsak lastni podprostor $\mathcal{U}$ preslikave A velja $B(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$, potem preslikavi A in B komutirata.

Pisni izpit, 17. 9. 1998

1. Dani sta matriki
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Naj bo $\mathcal{M}$ množica vseh tistih matrik, ki hkrati komutirajo z obema matrikama A in B, $\mathcal{N}$ pa množica tistih matrik, ki komutirajo vsaj z eno od A ali B.

(a) Pokaži, da je $\mathcal{M}$ vektorski podprostor v prostoru 2×2 realnih matrik in določi njegovo bazo.

(b) Pokaži, da množica $\mathcal{N}$ ni vektorski podprostor in poišči najmanjši podprostor v realnih matrikah velikosti 2×2, ki množico $\mathcal{N}$ vsebuje.

2. Poišči vse ravnine, ki so enako oddaljene od točke $A(1, 1, 1)$ in premice
$$p\colon\ \frac{x-3}{2} = y + 3 = 1 - z\,,$$
gredo skozi točko $B(3, -2, 2)$ in ne sekajo premice p.

3. Naj bosta a in b dana realna parametra. Obravnavaj sistem enačb
$$\begin{aligned} x + y + z &= b \\ ax + y + az &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ ax + y + bz &= 1 \end{aligned}$$
v odvisnosti od obeh parametrov.

4. V prostoru polinomov stopnje največ dva je dan skalarni produkt
$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt\,.$$
Linearna preslikava $A\colon\ P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ je normalna glede na ta skalarni produkt. Njeno sliko razpenjata polinoma $t^2 + 1$ in $t + 1$. Določi jedro preslikave A.

Pisni izpit, 3. 9. 1999

1. Izračunaj determinanto $n \times n$ matrike
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & \dots & \dots & \dots & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Dan je sistem enačb

$$\begin{aligned} x+3y+2z-w &= 1 \\ x+5y+z-2w &= 2 \\ 3x+5y+8z+3w &= -3 \\ 2x+2y+bz+5w &= a \end{aligned}$$

Obravnavaj njegovo rešljivost v odvisnosti od parametrov a in b ter poišči rešitev v posebnem primeru, ko je $b=7$ in $a=-1$.

3. Dani sta premici:

$$p\colon\ x=2t+3,\ y=t,\ z=3, \quad q\colon\ x=s+1,\ y=s+2,\ z=-s+1\,.$$

Poišči premico, ki je od premic p in q enako oddaljena ter leži v ravnini $z=0$.

4. Linearna transformacija $A\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je v standardni bazi predstavljena z matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poišči tak skalarni produkt na prostoru $\mathbb{R}^3$, da bo transformacija A normalna. (*Nasvet:* Upoštevaj lastnosti normalnih transformacij.)

Pisni izpit, 9. 6. 2000

1. V prostoru $P_3(\mathbb{R})$ polinomov stopnje največ tri sta dana podprostora

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &:= \{p \in P_3(\mathbb{R});\ p(1)=p'(0)=0\} \quad \text{in} \\ \mathcal{V} &:= \{p \in P_3(\mathbb{R});\ p(0)=p'(1)=0\}\,. \end{aligned}$$

Določi baze prostorov $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$ in $\mathcal{U}+\mathcal{V}$.

2. O linearnem funkcionalu $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vemo:

$$\begin{aligned} f(1,1,2) &= 2 \\ f(1,2,1) &= 4 \\ f(2,1,1) &= 6 \end{aligned}$$

Določi predpis za linearni funkcional f. Kateri vektor ustreza funkcionalu f po Rieszovem izreku?

3. Dana je matrika

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Določi lastne vrednosti matrike A.

(b) Diagonaliziraj A z ortogonalno prehodno matriko.

4. Kaj predstavlja naslednja enačba v odvisnosti od parametra a:

$$(a+2)x^2 + (4-2a)xy + (a+2)y^2 = 1\ ?$$

Skiciraj to krivuljo za primer $a = 1$.

Pisni izpit, 22. 6. 2000

1. Dani sta matriki

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in podmnožici v $M_2(\mathbb{R})$ prostoru realnih matrik velikosti 2×2:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &:= \{X \in M_2(\mathbb{R});\ AX = XA \text{ in } BX = XB\}\,, \\ \mathcal{V} &:= \{X \in M_2(\mathbb{R});\ AX = XA \text{ ali } BX = XB\}\,. \end{aligned}$$

Pokaži, da je množica $\mathcal{U}$ podprostor, $\mathcal{V}$ pa ni podprostor v $M_2(\mathbb{R})$. Poišči bazo prostora $\mathcal{U}$ in najmanjši podprostor v $M_2(\mathbb{R})$, ki množico $\mathcal{V}$ vsebuje.

2. V ravnini leži pravilni šestkotnik $ABCDEF$. Točka P razpolavlja stranico AB, točka R razpolavlja stranico FE, točka Q pa deli stranico DE v razmerju $DQ : QE = 1 : 2$. V kakšnem razmerju se sekata daljici PQ in BR?

3. Obravnavaj in reši naslednji sistem enačb v odvisnosti od realnega parametra a:

$$\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ 2x - 3y + az &= 0 \\ (a-2)x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

4. Preslikava $A\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana s pravilom

$$A\vec{x} := \vec{x} - (\vec{a} \cdot \vec{x})\vec{a}\,,$$

kjer je $\vec{a}$ v naprej izbran vektor iz $\mathbb{R}^3$.

(a) Pokaži, da je preslikava A linearna.

(b) Poišči njene lastne vrednosti in ustrezne lastne podprostore.

(c) Določi pravilo za adjungirano preslikavo A^* (glede na običajni skalarni produkt v $\mathbb{R}^3$).

Pisni izpit, 4. 9. 2000

1. Naj bosta U in V naslednji podmnožici prostora polinomov z realnimi koeficienti stopnje največ n:

$$\begin{aligned} U &= \{p \in P_n(\mathbb{R});\ p(0) = p'(1) = 0\}\,, \\ V &= \{p \in P_n(\mathbb{R});\ p'(0) = p(1) = 0\}\,. \end{aligned}$$

(a) Pokaži, da sta U in V vektorska podprostora.

(b) Izračunaj $U + V$.

2. Točke $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 0, 0)$ in $C(-1, 0, -1)$ ležijo na plašču stožca, ki ima vrh v izhodišču. Določi presek ravnine

$$x + y - 2z = 1$$

z osjo tega stožca.

3. Naj bo a dano realno število, $F\colon\ P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ pa preslikava, podana s pravilom

$$(Fp)(t) := (tp(t + 1))' + at^2 p(\frac{1}{t})\,.$$

(a) Pokaži, da je preslikava F linearna.

(b) Poišči matriko za F v bazi $\{1, t, t^2\}$.

(c) Poišči rang preslikave F v odvisnosti od parametra a.

4. Katero ploskev v prostoru predstavlja enačba

$$x^2 + y^2 + 4z^2 - 14xy + 8xz - 8yz = 24\,?$$

Čim bolj natančno nariši njen presek z ravnino $z = 0$.

Pisni izpit, 18. 9. 2000

1. [25 %] Naj bo x dano realno število. Izračunaj naslednjo determinanto velikosti $n \times n$:

$$\begin{vmatrix} -x & x & & & \\ & -x & x & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -x & x \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Če ne znaš rešiti naloge v splošnem, jo reši vsaj za $n = 5$ [10%].

2. [25 %] Dane so točke $A(2, 1, 3)$, $B(2, -1, 1)$, $C(1, 1, 1)$ in $D(1, 1, 2)$. Določi vse ravnine skozi C in D, ki so enako oddaljene od A in B.

3. Dani so naslednji funkcionali na prostoru realnih polinomov stopnje največ dva:

$$\begin{aligned} f_0(p) &= p(0) + p''(0) \\ f_1(p) &= p'(1) \\ f_2(p) &= p''(2) + p'(-1) \end{aligned}$$

(a) [12 %] Katere matrike ustrezajo tem funkcionalom v standardnih bazah?

(b) [13 %] Pokaži, da je $\{f_0, f_1, f_2\}$ baza prostora $P_2(\mathbb{R})^*$.

4. Poišči diagonalno matriko, ki je ortogonalno podobna matriki

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pisni izpit, 7. 2. 2001

1. V odvisnosti od parametra λ določi kakšno bazo in dimenzijo prostora

$$\mathcal{L}\{(1, \lambda + 1, -1), (2, \lambda + 3, \lambda^2 - 3), (1, 2, -1)\} \subset \mathbb{R}^3 .$$

2. Pravilni šestkotnik $ABCDEF$ leži v prostoru $\mathbb{R}^3$ in ima za oglišča točke $A(1, 0, 1)$, $B(0, 0, 0)$ in $C(0, a, b)$. Določi vse pare števil a in b tako, da bodo podatki smiselni in nato v enem od teh primerov določi koordinate ostalih oglišč.

3. Preslikava $A\colon\ P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ je podana s pravilom

$$(Ap)(t) = (tp(t))' - 2t^2 p(\frac{1}{t}) .$$

(a) Pokaži, da je preslikava A linearna.

(b) Določi matriko, ki pripada preslikavi A v standardni bazi $\{1, t, t^2\}$.

(c) Poišči kakšno bazo jedra in slike preslikave A.

4. Preslikava $T\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je pravokotni projektor na ravnino $x - 2y + 2z = 0$.

(a) Določi njeno matriko v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

(b) Kaj so lastni vektorji in lastne vrednosti preslikave T?

(c) Kakšna je matrika preslikave T^* glede na običajni skalarni produkt v $\mathbb{R}^3$?

Pisni izpit, 13. 6. 2001

1. Reši naslednji sistem enačb

$$\begin{aligned} (a+1)x - y + z + (a+1)u &= 1 \\ -x + (a+1)y - z + (a-1)u &= 0 \\ (a+1)x + (a-1)y + (a+1)z + (3a+1)u &= 0 \end{aligned}$$

v odvisnosti od realnega parametra a.

2. Preslikava $A\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je pravokotna projekcija na ravnino

$$x + 2y - 2z = 0\,,$$

preslikavi $B\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pa iz baze $\{(1,0,1),(0,1,0),(0,1,1)\}$ v standarno bazo ustreza matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Katera matrika ustreza preslikavi $A \circ B$ v standardnih bazah?

3. Trikotnik ABC ima stranice $c = \overline{AB}$, $b = \overline{AC}$ in $a = \overline{BC}$.

(a) Izrazi dolžine težiščnic t_a, t_b in t_c samo z dolžinami stranic.

(b) Kakšno je razmerje med vsoto kvadratov težiščnic in vsoto kvadratov stranic?

4. V prostoru $C([0,\frac{\pi}{2}])$ zveznih realnih funkcij na intervalu $[0,\frac{\pi}{2}]$ je dan skalarni produkt

$$(p,q) := \int_0^{\pi/2} p(t)q(t)\,dt\,.$$

Kateri polinom stopnje največ ena je najbližje funkciji

$$f(t) = \sin t$$

glede na ta skalarni produkt? Izračunaj to (najkrajšo) razdaljo.

Pisni izpit, 21. 6. 2001

1. Naj bo x realno število in n naravno število, večje od 3. Izračunaj naslednjo determinanto velikosti $n \times n$:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & \ddots & & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & x & n-1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & n \end{vmatrix}.$$

2. Dana sta valj z osjo

$$\vec{r}(t) = (0,2,2) + t(1,1,0)$$

in polmerom 2 in sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Poišči enačbe vseh ravnin, ki se dotikajo valja in sfere.

3. Preslikava $A\colon\ P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ je podana s pravilom

$$(Ap)(t) := p(-t)\,.$$

(a) Določi lastne vektorje in lastne vrednosti preslikave A.

(b) Ali je preslikava A normalna glede na skalarni produkt

$$(p,q) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt\ ?$$

4. Čim bolj natančno nariši naslednjo krivuljo v ravnini:

$$x^2 - 36xy - 14y^2 = 104\,.$$

Pisni izpit, 4. 9. 2001

1. Dana je matrika

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrika B je definirana bločno s pravilom

$$B := \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix},$$

pri čemer 0 pomeni matriko velikosti 3×3 s samimi ničlami. Naj bo $\mathcal{U}$ podprostor vseh matrik velikosti 6×6, ki komutirajo z matriko B. Določi njegovo razsežnost in bazo.

2. V ostrokotnem trikotniku ABC se višini CD in BE sekata v točki V. Točke M, N, O in P so zaporedoma razpolovišča daljic BV, CV, AC in AB. Označimo $\vec{b} := \overrightarrow{AB}$ in $\vec{c} := \overrightarrow{AC}$.

(a) Izrazi vektorja $\overrightarrow{AM}$ in $\overrightarrow{AN}$ samo z $\vec{b}$ in $\vec{c}$. (*Nasvet:* Pomagaj si s pravokotnimi projekcijami.)

(b) Pokaži, da je lik $MNOP$ pravokotnik.

3. Napiši matriko, ki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ ustreza rotaciji za kot 120^o okrog premice

$$x = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}\,.$$

Kakšne so njene lastne vrednosti in lastni vektorji?

4. V prostoru $P_2(\mathbb{R})$ polinomov stopnje največ dva je dan podprostor

$$\mathcal{U} := \{p \in P_2(\mathbb{R});\ p'(1) = p(1)\}$$

in skalarni produkt

$$(p,q) := \int_{0}^{1} p(t)q(t)\,dt\,.$$

Poišči kakšno pravokotno bazo ortogonalnega komplementa prostora $\mathcal{U}^\perp$.

Pisni izpit, 18. 9. 2001

1. V prostoru realnih polinomov stopnje največ tri sta dana podprostora

$$\mathcal{U} := \{p \in P_3(\mathbb{R});\ p(t) = p(-t) \text{ za vsak } t \in \mathbb{R}\}\,,$$

$$\mathcal{V} := \{p \in P_3(\mathbb{R});\ p(1) = p(-1)\}\,.$$

Poišči bazi prostorov $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ in $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

2. Premica p je presek ravnin

$$x + 2y + 3z = 4 \quad \text{in} \quad 3x + z = 5\,.$$

Poišči enačbo ravnine, ki vsebuje premico p in na ordinatni in aplikatni osi odreže enaka odseka.

3. Naj bo t realno število. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A := \begin{bmatrix} t-3 & -1 & 1 \\ 0 & t-2 & 0 \\ -1 & -1 & t-1 \end{bmatrix}.$$

Ali se da matrika A diagonalizirati?

4. Poišči matriko, ki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^4$ (z običajnim skalarnim produktom) ustreza pravokotni projekciji na podprostor

$$\mathcal{W} := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4;\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4,\ x_1 + x_3 = x_2 + x_4\}\,.$$

Pisni izpit, 18. 2. 2002

1. V prostoru realnih polinomov stopnje največ tri sta dana podprostora

$$U := \{p \in P_3(\mathbb{R});\ p(1) = p'(1) = p''(1)\} \text{ in}$$

$$V := \{p \in P_3(\mathbb{R});\ p(2) = p'(2) = 0\}\,.$$

Poišči baze prostorov U, V, $U \cap V$ in $U + V$.

2. Dana je preslikava $A\colon\ P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$,

$$(Ap)(t) := (t^2 - 1)p''(t) + 6t \int_0^1 p(s)\,ds\,.$$

(a) Pokaži, da je preslikava A linearna.

(b) Poišči matriko, ki preslikavi A ustreza v standardni bazi $\{1, t, t^2\}$.

(c) Izračunaj rang preslikave A. Ali je preslikava A obrnljiva?

3. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$\begin{bmatrix} 11 & -4 & -2 \\ 25 & -9 & -5 \\ 5 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nato geometrijsko pojasni, kateremu projektorju $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ta matrika pripada v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

4. V $\mathbb{R}^3$ je podan skalarni produkt $(\cdot,\cdot)$, v katerem so vektorji $(1,-1,0)$, $(1,2,0)$ in $(0,0,1)$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3$.

(a) Določi pravilo za ta skalarni produkt.

(b) Izračunaj kakšno bazo prostora $\{(0,1,0)\}^\perp$ (glede na ta skalarni produkt).

Pisni izpit, 11. 6. 2002

1. Dana je realno število x in matrika

$$A = \begin{bmatrix} -x & x & & & \\ & -x & x & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -x & x \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na neoznačenih mestih so ničle. Izračunaj determinanto bločne matrike

$$\begin{bmatrix} A & 2A \\ 3A & 5A \end{bmatrix}.$$

2. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ poljubna (ne nujno linearno neodvisna) vektorja iz prostora $\mathbb{R}^3$. Reši vektorsko enačbo

$$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{x} + (\vec{b} \cdot \vec{x})\vec{a}\ .$$

3. Linearna preslikava $T\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kompozitum pravokotne projekcije na ravnino $x+y+z$ in vrtenja v tej ravnini za kot 60^o. Napiši matriko, ki preslikavi T ustreza v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

4. Napiši matriko kakšne ortogonalne preslikave v standardni bazi, ki preslika premico

$$x = y = -z$$

na premico

$$\frac{x}{2} = y = \frac{z}{2}\ ?$$

(*Nasvet:* Upoštevaj geometrijske lastnosti ortogonalnih preslikav.)

Pisni izpit, 20. 6. 2002

1. Naj bo ABC enakokrak trikotnik s krakoma $AC = BC$. Točka A ima koordinate $(3,2,-4)$. Simetrala kota pri C leži na premici $y = 2$, $z = -1$. Nekje na simetrali kota pri B leži točka $T(2,2,0)$. Poišči koordinate točk B in C.

2. Določi rang in jedro matrike v odvisnosti od parametra a:

$$\begin{bmatrix} 1 & a+1 & -1 \\ 2 & a+3 & a^2-3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Naj bo A preslikava iz prostora polinomov stopnje največ dva vase, podana s predpisom

$$(Ap)(t) := p(t) + tp'(t) + 6t^2 \int_0^1 p(s)\, ds\,.$$

Pokaži, da je preslikava linearna ter določi njeno jedro in rang.

4. V ortogonalni bazi diagonaliziraj matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pisni izpit, 3. 9. 2002

1. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naj bo $\mathcal{C}$ množica matrik, ki komutirajo z matriko A. Pokaži, da je $\mathcal{C}$ vektorski podprostor v prostoru matrik in določi njegovo razsežnost.

2. Dani sta premici

$$p\colon\ \frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-7}{6}\,,\ q\colon\ \frac{x-3}{14} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-1}{2}\,.$$

Pokaži, da se premici sekata in določi enačbo ravnine, ki razpolavlja kot med njima.

3. Dana je preslikava $F\colon\ P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$,

$$(Fp)(t) = (tp(t+1))' + t^2 p(1/t)\,.$$

(a) Pokaži, da je preslikava F linearna.

(b) Določi matriko, ki ji pripada v standardni bazi $\{1, t, t^2\}$.

(c) Določi njeno jedro in rang.

4. V $\mathbb{R}^4$ uvedi skalarni produkt tako, da bodo vektorji $(1,0,0,0)$, $(1,-1,0,0)$, $(1,0,-1,0)$, $(1,0,0,-1)$ tvorili ortonormirano bazo v $\mathbb{R}^4$. Nato določi kakšno bazo ortogonalnega komplementa vektorja $(1,1,1,1)$ glede na ta skalarni produkt.