Zgled teoretičnega testa iz LA

Vse odgovore utemelji in zapiši vse vmesne račune.

1. Napiši: a) definicijo mešanega produkta treh vektorjev;

   b) njegov geometrijski pomen;

   c) lastnosti.

   d) Kdaj je mešani produkt treh vektorjev enak 0? Kako smo to dokazali?

2. Imamo ravnino Σ z enačbo $3x + by + cz = d$.

   a) Napiši enotski vektor, pravokoten na Σ.

   b) Določi razdaljo točke $T(x_1, y_1, z_1)$ od ravnine Σ.

   c) Določi presečišče ravnine Σ z osjo x.

   d) Kakšen kot oklepa ravnina Σ z ravnino $cy = bz$?

3. a) Kdaj so vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ linearno neodvisni?

   b) Napiši definicijo baze in dimenzije vektorskega prostora X.

   c) Ali so vektorji $(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)$ linearno neodvisni? Ali sestavljajo bazo prostora $\mathbb{R}^4$? Določi razsežnost linearne ogrinjače teh treh vektorjev.

4. a) Napiši definicijo linearnega podprostora vektorskega prostora X.

   Naj bo $A : X \to Y$ linearen operator.

   b) Ali sta zaloga vrednosti in jedro operatorja A linearna podprostora? Odgovor dokaži.

   Naj bo $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   c) Določi zalogo vrednosti za B in $\ker B$.

   d) Ali je $\left\{ \vec{x}; B\vec{x} = 2\vec{i} \right\}$ linearen podprostor v $\mathbb{R}^2$?

5. Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

in $B \in M_3$ poljubna. Naj bo $C = AB$ in $D = BA$.

a) Izrazi c_{13} z b_{13}.

b) Izrazi d_{13} z b_{13}.

c) Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A.

d) Za katere i, j je $c_{ij} = b_{ij}$?

e) Za katere i, j je $d_{ij} = b_{ij}$?

6. Naj bo $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zrcaljenje čez premico $y = -x$.

   a) Napiši matriko za A v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^2$.

   b) Izračunaj A^2 in A^n za poljubno naravno število n.

   c) Določi rang in jedro preslikave A.

   d) Določi lastne vrednosti in lastne vektorje za A.