

Teoretični test iz LA, 4.7.2007

Vse odgovore utemelji in zapiši vse vmesne račune.

1. Napiši: a) definicijo skalarnega produkta dveh vektorjev v \mathbb{R}^3 ;
b) njegove lastnosti;
c) Kako s skalarnim produktom izračunamo kot med dvema vektorjema?
d) Če je $\vec{a} \perp \vec{b}$, dokaži Pitagorov izrek: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = \dots$
e) Kako je definiran skalarni produkt v \mathbb{C}^n (\mathbb{R}^n)?
2. Napiši enačbo ravnine, ki vsebuje točko T_0 s krajevnim vektorjem $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ in ima normalo $\vec{n} = (a, b, c)$:
a) v vektorski obliki;
b) s koordinatami (x, y, z) poljubne točke na ravnini.
Za kakšne a, b, c je ta ravnina vzporedna:
c) osi z ;
d) ravnini yz ?
e) Napiši še enačbo ravnine skozi tri nekolinearne točke s krajevnimi vektorji $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$.
3. a) Kdaj so vektorji $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ogrodje vektorskega prostora X , se pravi, da razpenjajo X ?
b) Napiši definicijo baze vektorskega prostora X .
c) Napiši definicijo razsežnosti vektorskega prostora X .
c) Ali so vektorji $(2, 2), (1, 1), (0, 1)$ ogrodje prostora \mathbb{R}^2 ? Ali so ti vektorji baza za \mathbb{R}^2 ?
4. Naj bo $A : X \rightarrow Y$ linearna preslikava.
a) Napiši definicijo jedra preslikave A . Ali je jedro linearen podprostor v X ? Odgovor dokaži.
b) Napiši definicijo ranga preslikave A .

c) Če je $A \in M_{mn}$, kako določimo rang za A ? Koliko je lahko največ rang matrike A ?

Če je $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, določi

d) rang za A ;

e) rang za $I + A$;

f) rang za $A - 2I$.

5. Naj bo $B : X \rightarrow X$ linearna preslikava.

a) Napiši definicijo lastne vrednosti in lastnega vektorja preslikave B .

b) Če je B realna simetrična matrika, kaj lahko rečeš o lastnih vrednostih in lastnih vektorjih za B ?

Naj bo $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Izračunaj N^2 .

d) Določi vse lastne vrednosti in lastne vektorje za N .

6. Naj bo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linearna preslikava.

a) Če je F surjektivna, koliko je rang preslikave F ? Koliko v tem primeru znaša $\dim(\ker F)$?

Preslikavi F priredimo (v standardnih bazah obeh prostorov) matriko A .

b) Kaj so stolpci matrike A ?

c) Koliko vrstic in koliko stolpcev ima A ?

d) Koliko vrstic in koliko stolpcev ima A^T ?

e) Koliko vrstic in koliko stolpcev ima AA^T ?

g) Če je F pravokotna projekcija na ravnino xy , zapiši matriko A .