

Teoretični test iz LA, 2.7.2008

Vpisna številka:

Ime in priimek:

vrsta:

sedež:

Vse odgovore utemelji in zapiši vse vmesne račune.

1. Napiši: a) definicijo mešanega produkta treh vektorjev;
b) njegov geometrijski pomen;
c) lastnosti.
d) Kdaj je mešani produkt treh vektorjev enak 0? Kako smo to dokazali? Kakšno zvezo ima to z determinantami 3×3 matrik?
e) Naj bo \vec{e} enotski vektor in $(\vec{e}, \vec{j}, \vec{k}) = 0$ in $(\vec{e}, \vec{i}, \vec{k}) = 0$. Določi \vec{e} .
2. Imamo točko A s krajevnim vektorjem \vec{r}_1 in točko B s krajevnim vektorjem \vec{r}_2 , pri čemer $A \neq B$.
 - a) Napiši enačbo premice skozi A in B .
 - b) Napiši krajevni vektor razpolovišča M daljice AB .
 - c) Napiši krajevni vektor točke C , ki jo dobimo tako, da A prezrcalimo čez točko B .
 - d) Napiši enačbo ravnine Σ , ki gre skozi izhodišče in je pravokotna na daljico AB . Posebej naredi to za primer, da je $A(0, 0, 1)$ in $B(-3, 0, 2)$.
 - e) Določi razdaljo točke $A(0, 0, 1)$ od ravnine Π z enačbo $x = z$. Ali ravnina Π vsebuje točko $(5, 3, 4)$?
3. a) Kdaj so vektorji $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ linearno odvisni?
b) Kdaj je množica $\{\vec{a}\}$ (z enim samim elementom) linearno neodvisna?
c) Napiši definicijo ogrodja in baze vektorskega prostora X .
d) Napiši definicijo razsežnosti vektorskega prostora X .
e) Ali so vektorji $(1, 0, -2), (3, 1, 0), (7, 3, 4)$ linearno odvisni? Kakšna je dimenzija linearne ogrinjače teh treh vektorjev (se pravi, kakšna je razsežnost linearne ogrinjače teh treh vektorjev)? Kaj je (geometrijsko) linearna ogrinjača teh treh vektorjev?

4. a) Za kakšne matrike in kako je definirana determinanta?

b) Naštej kar se da veliko lastnosti determinante.

c) Kako izračunamo determinanto trikotne matrike?

Naj bo $D = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, d_{33}) \in M_3$ diagonalna matrika.

d) Izračunaj D^5 , $\det(D)$ in $\det(I + D)$.

Naj bo A matrika, dobljena tako, da v D zamenjamo prvo in zadnjo vrstico.

e) Izračunaj $\det A$ in $\det(A^4)$. Kdaj je A obrnljiva? Koliko znaša rang matrike A ? Kdaj je A simetrična?

5. Linearni preslikavi $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ priredimo (v standardnih bazah obeh prostorov) matriko A .

a) Kaj so stolpci matrike A ?

b) Koliko stolpcev in koliko vrstic ima A ?

c) Koliko lahko največ znaša rang preslikave F ? Utemelji.

Naj bo $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ pravokotna projekcija na ravnino xy .

f) Izračunaj $P(x, y, z)$.

g) Zapiši matriko za P (v standardni bazi).

h) Določi $\ker P$ in $\text{im} P$ ter rang za P .

i) Določi dvorazsežen invarianten podprostor za P .

j) Določi lastne vrednosti in lastne vektorje za P .