

## Teoretični test iz LA, 18.6.2007

Vse odgovore utemelji in zapiši vse vmesne račune.

1. Napiši: a) definicijo mešanega produkta treh vektorjev;  
b) njegov geometrijski pomen;  
c) lastnosti.  
d) Kdaj je mešani produkt treh vektorjev enak 0? Kako smo to dokazali?
2. Imamo ravnino  $\Sigma$  z enačbo  $3x + by + cz = d$ .  
a) Napiši enotski vektor, pravokoten na  $\Sigma$ .  
b) Določi razdaljo točke  $T(x_1, y_1, z_1)$  od ravnine  $\Sigma$ .  
c) Določi presečišče ravnine  $\Sigma$  z osjo  $x$ .  
d) Kakšen kot oklepa ravnina  $\Sigma$  z ravnino  $cy = bz$ ?
3. a) Kdaj so vektorji  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$  linearno neodvisni?  
b) Napiši definicijo baze vektorskega prostora  $X$ .  
c) Ali so vektorji  $(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)$  linearno neodvisni? Ali sestavljajo bazo prostora  $\mathbb{R}^4$ ?
4. a) Napiši definicijo linearnega podprostora vektorskega prostora  $X$ .  
Naj bo  $A : X \rightarrow Y$  linearen operator.  
b) Ali sta zaloga vrednosti in jedro operatorja  $A$  linearna podprostora? Odgovor dokaži.  
c) Če je  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , določi zalogo vrednosti za  $A$  in  $\ker A$ .
5. Imamo matriko  $A$  razsežnosti  $5 \times 5$  in  $\det A = 10$ .  
a) Če zamenjamo dve vrstici v  $A$ , kolikšna je determinanta dobljene matrike?  
b) Če pomnožimo drugi stolpec matrike  $A$  s 6 in prištejemo zadnjemu stolpcu, kolikšna je determinanta dobljene matrike?  
c) Če pomnožimo tretji stolpec matrike  $A$  s 7, kolikšna je determinanta dobljene matrike?

- d) Ali obstaja  $A^{-1}$ ?
  - e) Izračunaj  $\det(2A)$ .
  - f) Reši enačbo  $A\vec{x} = 0$ .
  - g) Koliko rešitev ima enačba  $A\vec{x} = \vec{b}$ , kjer je  $\vec{b} \in \mathbb{R}^5$ ?
6. Naj bo  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  zrcaljenje čez premico  $y = -x$ .
- a) Napiši matriko za  $A$  v standardni bazi prostora  $\mathbb{R}^2$ .
  - b) Izračunaj  $A^2$  in  $A^n$  za poljubno naravno število  $n$ .
  - c) Določi rang in jedro preslikave  $A$ .
  - d) Določi lastne vrednosti in lastne vektorje za  $A$ .