Pravilni so vsi podatki (naj bi bli) ki so: črni, modri, malo manj črni
Za rdeče se ne ve če so pravilni.

Teoretični test iz LA, 18.6.2007

1. a) Definiran je le v IR^3. Mešani produkt je skalarni produkt vektorja a z vektorskim produktom b in c. a * (b × c). Rezultat je skalar.

b) Trije linearno neodvisni vektorji a, b, c tvorijo paralelepiped. Ploščina osnovne ploskve : |a×b|. Prostornina: |(a×b)*c|.

c) - pri zamenjavi dveh vektorjev mešani produkt spremeni predznak
- Ciklična premutacija vektorjev, ne spremeni mešanega produkta
- trije vektorji so linearno odvisni, ko je mešani produkt enak 0

d) Ko so a, b in c linearno odvisni.

Dokaz: a x b je pravokoten na a in na b in kaze v isti smeri kot normala na to ravnino, in če to skalarno pomnožimo z vektorjem, ki lezi na ravnini (c) dobimo 0.

---

2. a) (3, b, c) / (sqrt(3^2+b^2+c^2)) == [3/sqrt(3^2+b^2+c^2), b/sqrt(3^2+b^2+c^2), c/sqrt(3^2+b^2+c^2)]

b) Razdalja toče od ravnine je absolutna vrednost izraza:

(3x1 + by1 + cz1 - d) / (sqrt(3^2+b^2+c^2))

c) p = (0,0,0) + u(1,0,0)

x = u
3u = d
u = d/3

x = d/3

P(d/3,0,0)

d) cy=bz --> cy - bz = 0 --> n2 = (0, c, -b)

n1*n2 = |n1|*|n2|*cos(fi)

cof(fi) = (n1*n2) / (|n1| * |n2|) = (bc - bc) / ... == 0 / ...= = 0

fi = 90°

---

3. a) Vektorji a, b, c so linearno odvisni, NTK obstaja netrivialna linearna kombinacija
u1a + u2b + u3c = 0

b) Popravek: (B je podmnožica X) je baza <==> ko za vsak x element X, lahko na en sam način zapišemo kot linearno kombinacijo elementov iz B

//To je tudi pravilno! Vendar nas ne sprašuje po n-razsežnem prostoru, zato ni glih fajn da tako napišeš:: Baza n-razsežnega prostora X^n je sistem n linearno neodvisnih vektorjev v X^n. Vsak vektor tega prostora lahko zapišemo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.

c) Sestavimo matriko in pogledamo če lahko pridelamo ničelno vrstico.

|1 0 0 1|
|0 1 0 1|
|0 0 1 0|

Ne moremo. Vektorji so linearno neodvisni.

Popravek: NE sestavljajo baze. To se gleda kot zaključena množica (torej nič ne moreš dodajat al pa odvzemat).

Ne sestavljajo baze prostora IR^4, saj so samo trije (mogli bi biti štirje). ???
Mislim, da sestavljajo, če so L.N. v IR^3 pol bojo tudi v IR^4, ker ne vpraša če so baza.

---

4. a) Dan je vektorski prostor X. Vsaka neprazna podmnožica W množice X, ki je zaprta za seštevanje in množenje s skalarjem je vektorski podporstor vektorskega prostora X.

//Presek vseh podprostorov nad dano množico vektorjev se imenuje njihova **ogrinjača**; če iz množice ne moremo odstraniti nobenega vektorja, ne da bi pokvarili njeno ogrinjačo, se ta množica imenuje *linearno neodvisna*. Linearno neodvisna množica, katere ogrinjača je cel prostor, se imenuje **baza**.

b) Da, jedro(A) je podprostor X-a, zaloga vrednosti pa je slika preslikave, torej je

podprostor Y.
Dokaz:

Jedro:
1. Izberemo si x, y ki sta elementa ker(A), ter dva skalarja - U, R
2. Ux + Ry € ker(A)
3. A(Ux+Ry) = UAx + RAy = 0 --> ker je preslikava linearna lahko tako zapišemo, in ker sta x in y oba v jedru je rezultat 0.

Zaloga vrednosti:
1. Izberemo si n, m ki sta elementa im(A) ==> n = Ax, m = Ay
2. Dokazujemo: Un + Rm € Im(A)
3. Un+Rm = UAn + RAm = A(Un+Rm) -> to je element im(A)

c)

$$\ker(A) = \{\, x \in V : Ax = 0 \,\}$$
$$\operatorname{im}(A) = \{\, Ax : x \in V \,\}$$

Zaloga vrednosti (slika): IR[1 0] --> Torej vsak vektor ki ga preslikujemo se pomniži z [1, 0]
Kernel: Če ne znamo drugače si nastavimo enačbo:

|1 1| | x | == | 0 |
|0 0| | y | == | 0 |

Dobimo: x = -y.

ker(A) = x * [1 -1] --> to nisem prepričan če je ok zapisano.

---

5. a) Determinanti se spremeni predznak. det(A) = -10

b) Če zmnožimo+prištejemo se determinanta ne spremeni. det(A) = 10

c) Če množimo se tudi determinanta množi. det(A) = 70

d) Inverz obstaja takrat ko je matrika kvadratna in ima neničelno determinanto. Odgovor je da.

e) Pravilo: det(2A) = 2^n *det(A) = 2^5 * 10 = 320

f) Pravila:
rang(A) = n, če det(A) != 0
rang(A) < n, če je det(A) == 0
rang(0) == 0

Iz pravil sledi, da je rang matrike A enak 5.

Matrika je singularna, če je det(A) = 0 in nesingularna če je det(A) != 0.
Če je matrika nesingularna, pomeni da nima ničelne vrstice in je edina rešitev (0,0,0,0,0).

g) Ker je matrika nesingularna, torej ima inverz, lahko Ax = b pomnožimo z A^-1.
Dobimo: x = A^-1 b

Enačba ima za vsak b natanko eno rešitev.

---

6. a) Narišemo si koordinatni sistem in pogledamo kam se preslikata standardna bazna vektorja [1, 0] in [0, 1]. Opazimo da se prvi preslika v [0, -1] (to je prvi stolpec matrike A), drugi pa v [-1, 0] (drugi stolpec). Dobimo:

|0 -1|
|-1 0|

b) A^2 = |1 0|
|0 1|

A^n --> ni težko opazit, da je rezultat odvisen od sodosti oz. lihosti n-ja. Če je n sodo število, je rezultat A^2, če je liho pa A.

c) Rang je 2 (ni neničelne vrstice).
Jedro pa je tisti vektor, ki se preslika v 0, torej samo (0,0).

d) Lastna vrednost lambda matrike A je realno ali kompleksno število, s katerim linearna preslikava pomnoži pripadajoči lastni vektor x.
Lastni vektor x kvadratne matrike A je vektor, ki zadošča enačbi lastnih vrednosti: Ax = lambdaX.

Nastavimo enačbo za izračun lastnih vrednosti (po diagonali odštejemo lambde):

|0-lambda -1|
| | == 0
|-1 0-lambda|

Izračunamo to determinanto in dobimo: lambda1 = 1, lambda2 = -1

Lastne vektorje pa dobimo tako da vstavimo not eno izmed lamb in rešimo homogen sistem enačb (na desni so 0).
ali vstavimo v tole (A-lambda*I*)x=0

1. lambda = 1
|-1 -1| 0 |
|-1 -1| 0 |

Dobimo x1 = [1, -1]

2. lambda = -1

|1 -1| 0 |
|-1 1| 0 |

Dobimo x2 = [1, 1]

Teoretični test iz LA, 26.6.2007

1. a) Vektorski produkt je vektor c = a × b. Definiran je le v IR^3

b) Velikost a×b je enaka ploščini paralelograma ki ga razpenjata vektorja a in b. |a| * |b| * sin(fi)
Vektor c je pravokoten na ravnino ki jo razpenajta a in b.

//Pri definiciji in geom. pomenu je treba seveda še omenit, da je a x b pravokoten na a in b, njegova smer pa se določa s pravilom desnega vijaka (po domače: če šravf vrtiš po najkrajši //poti v smeri od a proti b, vektorski produkt kaže v smer kamor bi se odvijal/ zavijal vijak).

c) - ne velja komutativnost
- antikomutativnost: a×b = - a × b
- ne velja asociativnost
- jacobijeva identiteta: a × (b × c) + b × (c × a) + c × (a × b) = 0
- velja homogenost za množenje s skalarjem r: (r*a) × b = a × (r*b) = r * (a × b)
- distributivnost: a × (b+c) = a × b + a × c
- vektorski produkt vzporednih vektorjev je 0

- vektroski produkt pravokotnih vektorjev je |a|*|b|

d) Ko sta vektorja kolinearna.

Dokaz:

Če imaš 2 vzopredna vektorja in ju zložiš v "paralalogram" je ta paralelogram ubistvu črta in ima ploščino 0.

e)
i × j = k
j × i = -k

//vektorski produkt je ciklično simetričen. Imamo: i, j, k. Če se množita vektor in njegov desni sosed, potem je rezultat kar tretji vektor: i × j = k. Če se množita drugače *//postavljena vektorja, je rešitev negirani tretji vektor j × i = -k (i je levo od j). Če množimo ista vektorja je rezultat 0 (i × i = 0).*

f) |a × b| = |a|*|b|*sin(fi)
--> sin(fi) mora biti 1 --> sin(90) = 1 --> vektorja morata biti pravokotna

---

2. a) (1, -2, 1) / (sqrt(1+4+1)) = 1/sqrt(6), -2/sqrt(6), 1/sqsrt(6)

b) p = (0,1,0) + u(2,-4,w)

c) Pravokotna na ravnino bo, ko bo mela smer normale -> (1,-2,1) --> (2,-4,2) --> w = 2

d) Vzporedna bo ko bo ležala v ravnini - pravokotna na normalo.
s*n = 0
(2,-4,w)*(1,-2,1) = 0
10+w = 0
w = -10

---

3. a) Vektorji a1, a2...an so linearno neodvisni takrat ko niso linearno odvisni. To je, ko ne obstaja takšna linearna kombinacija, ko niso vsi
koeficienti 0 in velja u1a1+u2a2...+unan = 0.

b) Popravek: (B je podmnožica X) je baza <==> ko za vsak x element X, lahko na en sam način zapišemo kot linearno kombinacijo elementov iz B

c) Če zapišemo vektorje tako: 2a+c, 3b+c, 2a+3b+2c hitro ugotovimo da obstaja linearna kombinacija:
1*(2a+c) + 1*(3b+c) + (-1)*(2a+3b+2c) = 0 --> Torej, vektorji niso linearno neodvisni. Iz tega sklepamo, da ne sestavljajo baze IR^3.

//lažje je preverjat s pomočjo matrike. Sestavimo matriko, ena vrstica nam pride ničelna (po par operacijah), s tega sklepamo da so vektorji linearno odvisni.

```
|2 0 1|
|0 3 1|
|2 3 2|
   |
   |
   V
|2 0 1|
|0 3 1|
|0 0 0|
```

---

4. a) Stolpci matrike so slike baznih vektorjev.

b) 3 stolpce in 4 vrstice

c) Rang lahko znaša največ 3. Zato ker slikamo iz trirazsežnega prostora. Največji možen rang je vedno enak manjši dimenziji izmed obeh.

d) dim(ker A) + rang A = 3 ==> dim(ker A) = 1
Naj tu omenim še da je rang A enak dim(Im A).

Obstaja nesingularna 2×2 podmatrika.

Ne, ker če bi lahko obstajala bi moral biti rang enak 3.

---

5. a) Lastna vrednost lambda matrike A je realno ali kompleksno število, s katerim linearna preslikava pomnoži pripadajoči lastni vektor x.
Lastni vektor x kvadratne matrike A je vektor, ki zadošča enačbi lastnih vrednosti: Ax = lambdaX.

Lastne vrednosti so tisti D ki zadoščajo enačbi det(A-DI) = 0
Lastni vektorji so tisti vektorji x ki zadoščajo enačbi (A-DI)x = 0

b)

lambdo dobimo (1-lambda)^3 = 0 --> lambda je 1.

Pol pa ko vektorje računamo, dobimo ničelno 3*3 matriko ?? To pomeni da so lastni vektorji vsi vektorji ??

c) |7 0 0|
|0 7 0|
|0 0 7|

d) Če posplošimo rešitev pri b, lahko sklepamo da pride lastna vrednost = 7. Lastni vektorji pa so spet vsi vektorji.

---

6. a) Vrtenje za 180°

b) Vrtenje za 360°. Nič se ne spremeni, torej lahko napišemo da je A^4 identiteta.

c) To lahko vidimo iz skice:

Narišemo si x in y (pravokotna) in v stičišče postavimo kuli, ki predstavlja z. Potem zavrtimo za 90°. Opazimo da se z ne spremeni --> določimo lastni vektor (0,0,1) in lastno vrednost 1.

Zapišemo matriko rotacije |cos -sin 0 |
|sin cos 0|
| 0 0 1| izberemo za lambda=1, potem je lastni vektor x(x,y,z)=(0,0,1) --> **Tudi tako je pravilno.**

d) Tudi to lahko razberemo iz skice (da ne rabimo tiste matrike rotacije znat na pamet).

X--->Y
Y--->-X
Z-->Z

Zapišemo matriko (kot je spodaj).

V matriko rotacije vsavimo kot.
|0 -1 0|
|1 0 0|
|0 0 1|

Teoretični test iz LA, 4.7.2007

1. a) Skalarni produkt je binarna operacija definirana na vektorjih a, b € IR^3. Rezultat je skalar c = a*b, c€IR

b) - komutativnost: a*b = b*a
- distributivnost: a*(b+c) = a*b + a*c
- asociativnost: (ra) *b = a* (r*b) = r*(a*b)

-norma: sqrt(a*a) = |a|
|a| = sqrt(a1^2 + a2^2 + a3^2)
- normalizacija: a/|a|

- trikotniška neenakost: |a+b| <= |a| + |b|

- sklarani produkt dveh vzporednih istosmernih vekotrjev: a*b = |a|*|b|
- skalarni produkt dveh vzporednih nasprotnosmernih vektorjev: a*b = -|a|*|b|
- skalarni produkt dveh pravokotnih vektorjev: a*b = 0

c)cos(fi) = (a*b) / (|a| * |b|)

d)|a+b| ^ 2 = |a|^2 + |b|^2
|a+b|^2 = |a|^2 + 2*|a*b| + |b|^2 --> sredinski člen je 0 ker sta pravokotna, torej ostane desna stran: |a|^2 + |b|^2

e) Skalarni produkt v IR^n: <an, bn> = a1b1 + a2b2 + ... + anbn = Vsota (ko gre i od 1 do n) {ai*bi}
Skalarni produkt v C^n: <z, w> = z1w1+z2w2+...+znwn
<z, z> = |z1|^2+...+|zn|^2 = ||z||

---

2. a) E: (r-r0)*n=0 ali E: r*n=d kje je d=r0*n
r,r0,n so vektorji

b) ax + by + cz = d, kjer je d=ax0 + by0 + cz0

c) a= 0, b=0, c=1
c je lahko karkoli??

d) a = 0, b=1, c=1

b,c sta lahko karkoli??

e) r0 + s(r1-r0) + u(r2-r0), za s, u € IR //to je prepisano iz priročnika, tak da verjetno je prav.

| x-x0 y-y0 z-z0 |
|x1-x0 y1-y0 z1-z0|=0
|x2-x0 y2-y0 z2-z0|
Točka T(x,y,z) leži na ravnini.

---

3. a) Ko z njimi lahko kot linearno kombinacijo predstavimo vsak vektor v prostoru - tudi na več načinov (ni nujno da so linearno neodvisni, lahko jih je neskončno mnogo).

Za vektorski prostor U nad obsegom O in neko množico vektorjev V iz U:

$$\mathrm{Lin}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n\}, \forall \alpha_n \in O, \forall v_n \in V$$

Lin(V) je podprostor vektorskega prostora U.

b) Baza vektorskega prostora X je množica vektorjev, s katerimi lahko na samo en način predstavimo vsak vekor v prostoru.

//Baza je poseben primer ogrodja prostora - vsi vektorji v ogrodju so linearno neodvisni.

c) Razsežnost prostora nam pove velikost njegove baze. n-razsežni prostor ima v bazi n-vektorjev.

d) Da. Ne, ker sta (2,2) in (1,1) Linearno odvisna.

---

4. a) Jedro linearne preslikave so vsi vektorji ki zadoščajo enačbi Ax=0
Da.

Dokaz: naj bosta vektorja u in v v jedru preslikave A. Potem velja A(u) = A(v) = 0

A(u+v) = A(u) +A(v) = 0 + 0 = 0
A(ru) = rA(u) = r0 = 0

Iz tega sklepamo da sta u+v in ru v jedru preslikave, torej je jedro preslikave A podprostor X-a.

b) Rang je razsežnost slike, ki jo predstavlja linearna transformacija A.

c) Določitev ranga (rekurzivno):
Najprej naj bo k = min{m, n}

1. Preverimo, ali so vse poddeterminante reda k ničelne
2. če ni tako, velja rang = k
3. Če pa so vse poddterminante reda k ničelne, ponovimo postopek za k = k-1

Največji rang za matriko m*n je min{m, n}.

d) Rang je 1

e) Rang je 2

f) Rang je 1

---

5. a) Lastna vrednost lambda matrike A je realno ali kompleksno število, s katerim linearna preslikava pomnoži pripadajoči lastni vektor x.
Lastni vektor x kvadratne matrike A je vektor, ki zadošča enačbi lastnih vrednosti: Ax = lambdaX.

lastne vrednosti so tisti lambda ki zadoščajo enačbi det(A-lambda*I) = 0
lastni vektorji so tisti vektorji x ki zadoščajo enačbi (A-lambda*I)x = 0

b) Lastne vrednosti simetrične matrike so vedno realne. Lastni vektorji so linearno neodvisni (to so v bistvu pi vseh matrikah) in pravokotni. Simerične matrike imajo vedno n lastnih vektorjev (n = št. dimenzij). Dajo se diagonalizirati.

c) Dobimo 2*2 ničelno matriko. Ker množimo z diagonalno matriko, samo vsak element množimo z elementom diagonale.
Inverzna matrika obstaja, ko je det(N)!=0. det(N)=0, torej inverzna matrika ne obstaja? Tako je.

d) Lastna vrednost: lambda = 0

x=[1,0] **--> Kako prideš do tega ?**
vsaviš lambda v (A-lambda*I)x = 0
|0 2|*|x|=0
|0 0| |y|
dobimo 2y=0-> y=0

x je lahko karkoli, ker množimo z 0, ko je bilo tko smo vzeli da je 1.

---

6. a) Če je preslikava surjektivna velja ImF = IR^2 (v tem primeru).
Rang je (po definiciji) enak dim(Im F), torej rang F = 2.

Enačba: dim(ker) + rang = dimenziji prostora iz katerega slikamo (leva stran puščice)
dim(kerF) = 1

UPS! Napaka. Zgoraj je rang 2, dimenzija kernela pa je 1. Popravljeno.

Če je surjektivna -> bijektivna+injektivna -> če je injektivna potem je kerF={0} **->?** dim(kerF)=0 **--> Da, če je kerF = 0, je dimenzija kerF = 0.**
Rang pa 2.

b) Slike baznih vektorjev.

c) Če imamo lin. preslikavo IR^n -> IR^m imamo matriko Mmxn.
vrstic: 2
stolpcev: 3

d) i-ti stolpec M je i-ta vrstica M'
vrstic: 3
stolpcev: 2

e) (2x3)(3x2)=2x2

g) Narišemo si skico. In vidimo:

x --> x
y --> y
z --> 0

Ker pa slikamo iz IR^3 v IR^2, zgubimo eno dimenzijo (črtamo spodnjo vrstico):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Teoretični test iz LA, 10.9.2007

1. a) Vektorski produkt je vektor c = a × b. Definiran je le v IR^3

b) Velikost a×b je enaka ploščini paralelograma ki ga razpenjata vektorja a in b. |a| * |b| * cos(fi)
Vektor c je pravokoten na ravnino ki jo razpenajta a in b.

c) - ne velja komutativnost
- antikomutativnost: a×b = - a × b
- ne velja asociativnost
- jacobijeva identiteta: a × (b × c) + b × (c × a) + c × (a × b) = 0
- velja homogenost za množenje s skalarjem r: (r*a) × b = a × (r*b) = r * (a × b)
- distributivnost: a × (b+c) = a × b + a × c
- vektorski produkt vzporednih vektorjev je 0
- vektroski produkt pravokotnih vektorjev je |a|*|b|

d) a in i sta linearno odvisna. a lahko zapišemo kot Ui, kjer je U skalar.

e) Računamo:

Imamo dve enačbi:
1. (to je pravilo - antikomutativnost): -a × b = b × a
2. (to imamo podano): a × b = b × a

Enačimo: a × b = -a × b
a × b - (a × b) = 0
-2(a × b) = 0
a × b = 0

Vektorja morata biti kolinearna.

f) a × b = (a2b3-b2a3, a3b1-b3a1, a1b2-b1a2)

---

2. a) E: (r-r0)*n=0 ali E: r*n=d kje je d=r0*n
r,r0,n so vektorji

b) Ravnina vsebuje izhodišče, če je d = 0
oz. r0*n mora biti enako 0.

c) Razdalja je absolutna vrednost izraza:

(ax+by+cz-d) / (sqrt(a^2+b^2+c^2)) = -1 / sqrt(6) --> 1 / sqrt(6)

d) Ravnini sta vzporedni, če sta njuni normali kolinearni. V tem primeru nista, torej ravnini nista vzporedni.
Računamo presek ravnin (premica):

2x -y + z = 1 --> z = 1 -2x + y
x -y +z = 1

x - y + 1 - 2x + y = 1 --> -x = 0 --> x = 0
--> z = 1 + y

y določimo 0 --> z = 1
T (0, 0, 1)

Zdaj mamo točko, rabimo še smer premice. Nardimo vektorski produkt normal obeh ravnin.

(2, -1, 1) × (1, -1, 1) = (0, -1, -1)

p = (0,0,1) + u(0,-1,-1)

---

3. a) Vektorji a, b, c so linearno odvisni, NTK obstaja netrivialna linearna kombinacija u1a + u2b + u3c = 0

b) (-1)*a + 1*b + (-1) *c + (a-b+c) = 0. Vektorji so linearno odvisni.

c) Baza n-razsežnega prostora X^n je sistem n linearno neodvisnih vektorjev v X^n. Vsak vektor tega prostora lahko zapišemo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.

d) Nardimo matrika in opazimo da so linearno neodvidni. Baze pa NE sestavljajo, saj so samo trije, rabili pa bi štiri.

---

4. a) Preslikava je linearna, če ustreza pogojem linearnosti:

A(x+y) = Ax + Ay ; za vsak x in y, elementa X

A(rx) = rAx ; r element IR, x element X

b) Rang je razsežnost slike A-ja.

c) Spet enačba: dim(ker A) + rang = razsežnost X (v tem primeru)
dim(kerA)=1

d) Enako kot zgoraj pri eni nalogi, le da zdaj slikamo iz IR^3 -> IR^3. Torej je spodaj še ničelna vrstica:

|1 0 0|
|0 1 0|
|0 0 0|

---

5. a) c13 = 2b13

b) d13 = -5b13

c) Lastne vrednosti dobimo: 2, 1, -5

Vektorji: v1 = [0,3,1], v2 = [-1,0,6], v3 = [-1, 2, 0]

d) 2,1
2,2
2,3

e) 1,2
2,2
3,2

---

6. a) Pomeni vrtenje za 360°, torej premik v isto lego, oz. množenje z identiteto.

b) Ivariantni prostori so tisti prostori, ki jih preslikava ne spremeni.

0-dim: {0}
1-dim: IR * [0 y z], IR * [1 0 0]
2-dim: IR^2 × {0}, U = x { [0, y, z], [0 0 1] }

c)
Zapišemo matriko rotacije | 1 0 0 |
| 0 cos sin|

| 0 -sin cos|

1. Lambda = 1
Vektor (1,0,0)

2. Lambda = -1
Vektor (0,1,1)

d)
x-->x
y-->-y
z-->-z

| 1 0 0 |
| 0 -1 0 |
| 0 0 -1 |

//

Wednesday13, genesiss in mogoče še kdo..