

Teoretični test iz LA, 26. 6. 2008

Vpisna številka:

Ime in priimek:

vrsta:

sedež:

Vse odgovore utemelji in zapiši vse vmesne račune.

1. Napiši: a) definicijo skalarnega produkta dveh vektorjev v \mathbb{R}^3 ;
b) njegove lastnosti;
c) Kako s skalarnim produktom izračunamo kot med dvema vektorjema? Koliko znaša kot med neničelnima vektorjema, ki sta linearno odvisna?
d) Če je $\vec{a} \perp \vec{b}$, dokaži Pitagorov izrek: $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \dots$
e) Kako je definiran skalarni produkt v \mathbb{C}^n ?
f) Kaj pravi neenakost Cauchy-Schwarz-Bunjakovski?
2. Napiši enačbo ravnine, ki vsebuje točko T_0 s krajevnim vektorjem $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ in ima normalo $\vec{n} = (a, b, c)$:
a) v vektorski obliki;
b) s koordinatami (x, y, z) poljubne točke na ravnini.
Za kakšne a, b, c je ta ravnina vzporedna
c) premici $\vec{r} = \{t(-1, 0, 1); t \in \mathbb{R}\}$;
d) ravnini xz ?
e) Napiši parametrično enačbo ravnine skozi tri nekolinearne točke s krajevnimi vektorji $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$. Izračunaj še normalo te ravnine. Napiši enačbo in normalo ravnine, ki vsebuje izhodišče ter točki $(1, 0, 0)$ in $(0, 1, -1)$.
3. Naj bo X vektorski prostor nad poljem skalarjev \mathbb{K} .
a) Napiši definicijo linearnega podprostora v X .
b) Kaj so linearni podprostori v \mathbb{R}^3 (geometrijsko)?
c) Kaj je linearna ogrinjača (lupina) množice $M \subset X$?

Naj bo $S = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$ podmnožica v \mathbb{R}^3 .

d) Ali je S linearno odvisna množica? Utemelji odgovor.

e) Kaj je linearna ogrinjača množice S ?

f) Določi a tako, da bo premica z enačbo $y = 2x + a$ linearen podprostor v \mathbb{R}^2 . Določi še kako bazo tega podprostora.

4. a) Napiši definicijo linearne preslikave $A : X \rightarrow Y$.

b) Napiši definicijo jedra preslikave A . Ali je jedro linearen podprostor v X ? Odgovor dokaži.

c) Napiši definicijo ranga preslikave A .

d) Kakšna je zveza med rangom in dimenzijo jedra preslikave A ?

e) Če je $A \in M_{mn}$, kako določimo rang za A ? Koliko je lahko največ rang matrike A ?

Če je $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$, določi

f) rang za A ;

g) rang za $A + 5I$.

5. Naj bo $B : X \rightarrow X$ linearen operator. Napiši definicijo:

a) lastne vrednosti in lastnega vektorja operatorja B ;

b) lastnega podprostora operatorja B ;

c) invariantnega podprostora za B .

Naj bo $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

d) Izračunaj N^2 .

e) Določi vse lastne vrednosti in lastne vektorje za N .