

## Teoretični test iz LA, 25.9.2007

Vse odgovore utemelji in zapiši vse vmesne račune.

1. Napiši: a) definicijo mešanega produkta treh vektorjev;  
b) njegov geometrijski pomen;  
c) lastnosti.  
d) Kdaj je mešani produkt treh vektorjev enak 0? Kako smo to dokazali?  
e) Izračunaj  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  in  $(\vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$ .  
f) Za kakšne  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  je  $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = abc$ ?
2. Imamo točko  $A$  s krajevnim vektorjem  $r_A$  in točko  $B$  s krajevnim vektorjem  $r_B$ , pri čemer  $A \neq B$ .  
a) Napiši enačbo premice skozi  $A$  in  $B$ .  
b) Napiši krajevni vektor razpolovišča  $M$  daljice  $AB$ .  
c) Napiši krajevni vektor točke  $C$ , določene tako, da  $A$  razpolavlja daljico  $CB$ .  
d) Če je  $A(0, 1, 0)$  in  $B(-3, 0, 2)$ , napiši enačbo ravnine  $\Sigma$ , ki gre skozi  $A$  in je pravokotna na daljico  $AB$ .  
e) Določi razdaljo ravnine  $\Pi$  z enačbo  $2y - x = 1$  od izhodišča. Ali ravnina  $\Pi$  vsebuje točko  $(1, 1, 5)$ ?
3. a) Kdaj so vektorji  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  linearno odvisni?  
b) Napiši definicijo baze vektorskega prostora  $X$ .  
c) Napiši definicijo razsežnosti vektorskega prostora  $X$ .  
d) Ali so vektorji  $(-2, 1, 1), (0, 5, -2), (4, 3, -4)$  linearno odvisni? Kakšna je dimenzija linearne ogrinjače teh treh vektorjev (se pravi, kakšna je razsežnost linearne podprostore, ki ga razpenjajo ti trije vektorji)?
4. a) Za kakšne matrike in kako je definirana determinanta?  
b) Naštej kar se da veliko lastnosti determinante.  
c) Kako izračunamo determinanto trikotne matrike?  
d) Ali je diagonalna matrika trikotna?  
Naj bo  $I \in M_3$  enotska matrika.

- e) Izračunaj  $\det(-5I)$ .
- f) Naj bo  $A$  matrika, dobljena tako, da v  $I$  zamenjamo prvi in drugi stolpec. Izračunaj  $\det A$  in  $\det(A^9)$ . Ali je  $A$  obrnljiva? Koliko znaša rang matrike  $A$ ? Ali je  $A$  simetrična? Izračunaj  $A\vec{j}$  in  $A^2$ .
5. Linearni preslikavi  $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  priredimo (v standardnih bazah obeh prostorov) matriko  $A$ .
- Kaj so stolpci matrike  $A$ ?
  - Koliko stolpcev in koliko vrstic ima  $A$ ?
  - Koliko lahko največ znaša rang matrike  $A$ ? Utemelji.
  - Ali je  $A$  lahko injektivna? Kaj lahko rečeš o razsežnosti jedra preslikave  $A$ ?
6. Naj bo  $A : X \rightarrow X$  linearna preslikava.
- Napiši definicijo lastne vrednosti in lastnega vektorja preslikave  $A$ .
  - Ali je lastni vektor lahko enak  $0$ ?
- Naj bo  $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  pravokotna projekcija na ravnino  $xz$ .
- Določi invariantne podprostore za  $P$ .
  - Določi vse lastne vrednosti in lastne vektorje za  $P$ .
  - Zapiši matriko za  $P$  v standardni bazi prostora  $\mathbb{R}^3$ .
  - Izračunaj  $P^2$  in  $P^*$ .