Teoretični test iz LA, 9.9.2008

Vpisna številka:

Ime in priimek:

vrsta: sedež:

Vse odgovore utemelji in zapiši vse vmesne račune.

1. Napiši: a) definicijo vektorskega produkta dveh vektorjev;

   b) njegov geometrijski pomen;

   c) lastnosti.

   d) Če je $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, kaj lahko rečeš o vektorjih $\vec{a}, \quad \vec{b}$? Kako smo to dokazali?

   e) Naj bo $\vec{c} \times \vec{j} = -\vec{i}$ in $< \vec{c}, \vec{j} >= 3$. Določi $\vec{c}$.

2. Imamo vektor $\vec{a} \neq 0$ in točko T_0 s krajevnim vektorjem $\vec{r_0} \neq 0$.

   a) Napiši parametrično enačbo premice p, ki gre skozi T_0 in je vzporedna vektorju $\vec{a}$.

   b) Napiši parametrično enačbo premice q, ki gre skozi izhodišče O in je vzporedna vektorju $\vec{a}$.

   Premica s ima enačbo $\vec{r} = 2\lambda\vec{a} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$.

   c) Ali gre premica s skozi izhodišče O? Kakšna je zveza med $s, \quad p, \quad q$?

   Premica t ima enačbo $\vec{r} = (2, 1, -3) + \lambda(1, 0, -1)$.

   d) Določi presečišče premice t z ravnino xy.

   e) Določi kot med premico t in ravnino xy.

   Naj bo $P\vec{x}$ pravokotna projekcija vektorja $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ na premico q.

   f) Določi zalogo vrednosti in rang preslikave P ter opiši njeno jedro.

3. a) Za kakšne matrike in kako je definirana determinanta?

   b) Naštej kar se da veliko lastnosti determinante.

   c) Kako izračunamo determinanto diagonalne matrike?

   Naj bo $B \in M_n$ in $\det B = -5$.

d) Izračunaj $\det(BB^T)$.

e) Ali je BB^T simetrična? Utemelji.

f) Ali je B singularna? Utemelji.

g) Ali so vrstice matrike B linearno neodvisne? Koliko je rang matrike B? Utemelji.

4. a) Kdaj so vektorji $\vec{x_1}, \vec{x_2}, ...\vec{x_n}$ linearno neodvisni?

   b) Ali so vektorji $\vec{a}, \quad \vec{b}, \quad \vec{c}, \quad 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ linearno neodvisni? Odgovor dokaži.

   c) Napiši definicijo baze vektorskega prostora X.

   d) Napiši definicijo razsežnosti vektorskega prostora X.

   Imamo polinome $p(x) = x, \quad q(x) = x - 1, \quad r(x) = x + 2, \quad s(x) = 2 - 2x$.

   e) Ali sta polinoma $q, \quad s$ linearno neodvisna? Utemelji.

   f) Izrazi konstanto 1 kot linearno kombinacijo polinomov q, r.

   g) Izrazi p kot linearno kombinacijo polinomov q, r.

5. a) Kdaj je preslikava $A : X \to Y$ (kjer sta X, Y vektorska prostora) linearna?

   b) Kaj je jedro linearne preslikave A? Ali je jedro linearen podprostor? Odgovor utemelji. Koliko je $A0$?

   c) Naj bo $X = Y$. Napiši definicijo lastne vrednosti in lastnega vektorja linearnega operatorja A.

   Naj bo $X = Y = \mathbb{R}^2$ in $A\vec{i} = 2\vec{i}, \qquad A\vec{j} = i \vec{+} j$.

   d) Ne da bi računal matriko za A, določi eno lastno vrednost in ustrezni lastni vektor za A.

   e) Izračunaj $A(\vec{j} - \vec{i})$. Od tod določi drugo lastno vrednost in ustrezni lastni vektor za A.

   f) Zapiši matriko za A v bazi $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$. Koliko je rang za A? Ali je A obrnljiva?