1. kolokvij, 1993

1. Naj bosta A in B kvadratni realni matriki

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

z $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ pa označimo množici

$$\mathcal{A} := \{X \in M_2(\mathbb{R});\ AX = XA\}, \quad \mathcal{B} := \{X \in M_2(\mathbb{R});\ BX = XB\}.$$

Pokaži, da sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ vektorska podprostora v $M_2(\mathbb{R})$ in določi baze prostorov $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ in $\mathcal{A} + \mathcal{B}$.

2. Naj bo $\mathcal{S}$ množica vseh takih matrik $A \in M_n(\mathbb{R})$, da je matrika $A + A^\top$ diagonalna. Pokaži, da je $\mathcal{S}$ vektorski podprostor prostora matrik $M_n(\mathbb{R})$, določi kakšno njegovo bazo in razsežnost.

3. Določi determinanto matrike $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, kjer je

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= (-1)^{i+1} \quad \text{za} \quad 1 \le i \le n, \\ a_{i,i-1} &= (-1)^i \quad \text{za} \quad 2 \le i < n, \\ a_{1,i} &= (-1)^{i+1} \quad \text{za} \quad 1 \le i \le n. \end{aligned}$$

Ostale komponente matrike A so enake 0.

4. Za dana števila $s, t, u \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$, definiramo matrike

$$M(s) := \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}, \quad N(t) := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}, \quad P(u) := \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dokaži, da se da matrika $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ zapisati kot produkt

$$X = M(s)N(t)P(u)$$

natanko tedaj, ko je $a \neq 0$ in je $\det(X) = 1$.

1. kolokvij, 1994

1. Dan je sistem n enačb z n neznankami:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) [20] S pomočjo Cramerjevega pravila izračunaj x_1 in x_n.

(b) [5] Določi še $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$.

2. Za matriko $A \in M_3(\mathbb{R})$ naj ${}^{\top}A$ pomeni matriko A, prezrcaljena čez stransko diagonalo. $\mathcal{S}$ in $\mathcal{T}$ naj bosta podmnožici $M_3(\mathbb{R})$ oblike

$$\mathcal{S} := \{A \in M_3(\mathbb{R});\ A = A^{\top}\}\,, \quad \mathcal{T} := \{B \in M_3(\mathbb{R});\ B^{\top} = {}^{\top}B\}\,.$$

Pokaži, da sta $\mathcal{S}$ in $\mathcal{T}$ podprostora, določi baze prostorov $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ in $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ in izračunaj razsežnost vsote $\mathcal{S} + \mathcal{T}$.

3. Naj bo $J \in M_n(\mathbb{R})$ matrika, ki jo sestavljajo same enke. Reši enačbo

$$J - X = XJ\,.$$

Če enačbe ne znaš rešiti v splošnem, jo reši vsaj za primer $n = 4$. ([15])

4. Določi rang matrike A v odvisnosti od realnega parametra t:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2t & 3 \\ 2 & 2-t & 1 & -t \\ 3 & 0 & 2+t & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

1. kolokvij, 1995

1. Izračunaj naslednjo determinanto velikosti $2n \times 2n$, ki ima na neoznačenih mestih ničle:

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & 1 & & & & \\ & 2 & & & 2 & & & & \\ & & \ddots & & \vdots & & & & \\ & & & n-1 & n-1 & & & & \\ 1 & 2 & \ldots & n-1 & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n \\ & & & & n+1 & n+1 & & & \\ & & & & n+2 & & n+2 & & \\ & & & & \vdots & & & \ddots & \\ & & & & 2n & & & & 2n \end{vmatrix}.$$

2. Dani sta matriki

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naj bo

$$\mathcal{U} := \{X \in M_3(\mathbb{R}); AX = XA\}\,, \quad \mathcal{V} := \{X \in M_3(\mathbb{R}); BX = XB\}\,.$$

Pokaži, da sta množici $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ vektorska podprostora v prostoru $M_3(\mathbb{R})$ in poišči baze prostorov $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ in $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

3. Določi razsežnost prostora

$$\mathcal{W} := \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 3+2a & 3a \\ 3a & 3a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1+3a & 3+2a \\ 3a & 3a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & a \\ 3 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a-1 & a-1 \\ a-1 & a-1 \end{bmatrix}\right\}$$

v odvisnosti od realnega parametra a.

4. Dano je naravno število $n \geq 3$. Glede na parnost števila n poišči bazo in razsežnost prostora
$$\mathcal{Z} := \{p \in P_n(\mathbb{R});\ p(0) = p''(0) = 0,\ p'(1) = p'(-1)\}.$$

1. kolokvij, 1996

1. Naj bo n naravno število, ki je večje od 2. Izračunaj naslednjo determinanto velikosti $n \times n$, ki ima na neoznačenih mestih ničle:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ -2 & 1 & 1 & & & \\ & -2 & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -2 & 1 & 1 \\ 1 & & & & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Naj bosta A in B realni kvadratni matriki

$$A := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ pa naslednji podmnožici v prostoru matrik $M_2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{U} := \{X \in M_2(\mathbb{R});\ AXA^\top = X\}, \quad \mathcal{V} := \{X \in M_2(\mathbb{R});\ BXB^\top = X\}.$$

Pokaži, da sta množici $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ vektorska podprostora v prostoru matrik $M_2(\mathbb{R})$ in poišči baze prostorov $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ in $\mathcal{U} + \mathcal{V}$.

3. Določi rang naslednje matrike v odvisnosti od realnega parametra a:

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-a^2 & 1 & 2a^2-1 & 2a-1 \\ 1 & 1 & 2a-1 & 2-a^2 & 2-a \\ 1 & 1 & 1 & a^2 & a \end{bmatrix}.$$

4. Naj bo $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}[x,y]$ podmnožica polinomov dveh spremenljivk x in y oblike

$$\mathcal{M} := \{a + by + cy^2 + x(d + ey + fy^2);\ a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}\},$$

podprostor $\mathcal{N}$ v prostoru $\mathcal{M}$ pa sestavljajo tisti polinomi $p \in \mathcal{M}$, za katere velja

$$\frac{\partial p}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial p}{\partial y}(1,1) = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x}\partial y(1,0) = \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(1,0).$$

Določi bazo in razsežnost prostora $\mathcal{N}$.

1. kolokvij, 1997

1. Dana je matrika

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in množica

$$\mathcal{M} := \{X \in M_3(\mathbb{R});\ XA + AX^\top = 0\}\,.$$

Pokaži, da je množica $\mathcal{M}$ podprostor v prostoru matrik $M_3(\mathbb{R})$. Določi njegovo bazo in razsežnost.

2. V prostoru realnih polinomov stopnje največ tri ležita podprostora

$$\mathcal{U} := \{p \in P_3(\mathbb{R});\ p(1) = p'(1)\}\,,\ \mathcal{V} := \{p \in P_3(\mathbb{R});\ p(1) = \int_0^1 p(t)dt\}\,.$$

Poišči baze prostorov $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ in $\mathcal{U} + \mathcal{V}$.

3. Izračunaj naslednjo determinanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n-1 & n & n-1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n & n-1 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-1 & n & n-1 & \dots & 5 & 4 & 3 \\ n-1 & n & n-1 & n-2 & \dots & 4 & 3 & 2 \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

4. Poišči rang naslednje matrike v odvisnosti od realnega parametra a:

$$\begin{bmatrix} a+1 & -1 & 1 & a+1 \\ -1 & a+1 & -1 & a-1 \\ a+1 & a-1 & a+1 & 3a+1 \\ a & 2a & a & 2a \end{bmatrix}\,.$$

1. kolokvij, 1998

1. V prostoru $P_4(\mathbb{R})$ realnih polinomov stopnje največ štiri je dan podprostor

$$U := \{p \in P_4(\mathbb{R});\ p(1) = p'(0) = 0\}$$

in množice

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{x^4 + x^3 - 2, x^4 + x^2 - 2, x^3 - x^2\} \\ \mathcal{B} &:= \{x^4 + x^3, x^4 + x^2 - 2, x^2 - 1\} \\ \mathcal{C} &:= \{x^4 + x^3 - 2, x^4 + x^2 - 2, x^2 - 1\} \\ \mathcal{D} &:= \{x^3 + x^2 - 2, 2x^4 + x^3 - 3, x^2 - 1, x^4 + x^3 + x^2 - 3\}\,. \end{aligned}$$

Za vsako od množic $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ in $\mathcal{D}$ ugotovi ali je ogrodje in ali je baza prostora U.

2. Naj bo a dano realno število. V prostoru $\mathbb{R}^4$ je dan podprostor

$$V := \mathcal{L}\{(-2-a, 4, 5+a, 4+a), (1, -2, -2, -1), (-a, 3, 1+a, 4+a)\}\,.$$

V odvisnosti od parametra a določi razsežnost in kakšno bazo prostora V.

3. Za dano naravno število n izračunaj naslednjo determinanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-4 & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \end{vmatrix}\,.$$

4. V prostoru $M_2(\mathbb{R})$ realnih matrik velikosti 2×2 je dana matrika

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

in množici

$$\mathcal{A} := \{X \in M_2(\mathbb{R});\ AX = XA\}\,, \quad \mathcal{T} := \{X \in M_2(\mathbb{R});\ AX = X^{\mathsf{T}}\}\,.$$

Pokaži, da sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{T}$ vektorska podprostora v prostoru $M_2(\mathbb{R})$ in poišči baze prostorov $\mathcal{A}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{A}+\mathcal{T}$ in $\mathcal{A}\cap\mathcal{T}$.

1. kolokvij, 1999

1. Ali sta naslednji podmnožici vektorska podprostora prostora $\mathbb{R}^4$?

$$\mathcal{A} := \left\{(a,b,c,d);\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & b+1 \\ c+1 & d-1 \end{vmatrix}\right\}\,,$$

$$\mathcal{B} := \left\{(a,b,c,d);\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & -d \end{vmatrix}\right\}\,.$$

2. V množici realnih polinomov stopnje največ pet je dan vektorski podprostor

$$\mathcal{S} := \{p \in P_5(\mathbb{R});\ \int_{-1}^{1} tp(t)\,dt = 0\,,\quad \int_{-1}^{1} t^2 p(t)\,dt = 0\}\,.$$

(a) Določi njegovo razsežnost in kakšno bazo.

(b) Dopolni zgornjo bazo do baze celotnega prostora $P_5(\mathbb{R})$.

3. V prostoru $\mathbb{R}^4$ sta dana podprostora

$$\mathcal{U} := \mathcal{L}\{(1,2,2,1), (2,1,4,-1)\}\,,$$

$$\mathcal{V} := \{(a,b,c,d);\ a+b+c+d = 0,\ a+b = c+d\}\,.$$

Poišči baze prostorov $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$ in $\mathcal{U}+\mathcal{V}$.

4. Naj bo n naravno število večje od 2, x in y pa poljubni realni števili. Izračunaj naslednjo determinanto velikosti $n \times n$:

$$\begin{vmatrix} x & y & y & \dots & y & y \\ y & x & & & & \\ y & & x & & & y \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ y & & & & \ddots & y \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix}.$$

Na neoznačenih mestih determinante so ničle.

1. kolokvij, 2000

1. Dana je matrika

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naj bo

$$\mathcal{A} := \{X \in M_3(\mathbb{R});\ (A + X)^2 = A^2 + 2AX + X^2\}\,.$$

Pokaži, da je $\mathcal{A}$ vektorski podprostor v prostoru matrik $M_3(\mathbb{R})$, določi njegovo razsežnost in kakšno bazo.

2. V prostoru realnih polinomov stopnje največ tri sta dana podprostora

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &:= \{p \in P_3(\mathbb{R});\ p'(0) = p(1) = 0\}\,, \\ \mathcal{V} &:= \mathcal{L}\{2t^3 - t^2 - 1, t^2 + t - 1\}\,. \end{aligned}$$

Poišči baze prostorov $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ in $\mathcal{U} + \mathcal{V}$.

3. Naj bosta x in y realni števili. Izračunaj naslednjo tridiagonalno determinanto velikosti $n \times n$ (na neoznačenih mestih so ničle):

$$\begin{vmatrix} 2xy & x^2 & & & & \\ y^2 & 2xy & x^2 & & & \\ & y^2 & 2xy & x^2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & y^2 & 2xy & x^2 \\ & & & & y^2 & 2xy \end{vmatrix}.$$

4. Naj bo

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za naravno število n ugani koliko je A^n, nato pa svojo ugotovitev dokaži z indukcijo. Izračunaj še A^{-n}. (*Nasvet:* Najtežje je ugotoviti vrednost v zgornjem desnem kotu. Ko računaš zaporedne potence, poglej, katera števila se seštevajo med sabo.)

1. kolokvij, 2001

1. V $\mathbb{R}^4$ je dan podprostor

$$U := \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ a+b+c=0,\ 2c+d=0\}\ .$$

Za vsako od naslednjih množic utemelji ali je ogrodje in ali je baza prostora U:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &:= \{(1,1,-2,4),\ (0,-2,2,-4)\}\ ,\\
\mathcal{B} &:= \{(3,-1,-2,4),\ (0,0,2,-1)\}\ ,\\
\mathcal{C} &:= \{(1,0,-1,2),\ (0,1,-1,2),\ (1,1,-2,4)\}\ ,\\
\mathcal{D} &:= \{(-3,1,2,-1),\ (2,-1,-1,2),\ (3,-1,-2,4)\ ,\\
\mathcal{E} &:= \{(-3,1,2,-1),\ (2,-1,-1,2)\}\ .
\end{aligned}$$

2. V prostoru $P_3(\mathbb{R})$ realnih polinomov stopnje največ tri sta dana podprostora

$$\begin{aligned}
U &:= \{p \in P_3(\mathbb{R});\ p(0)=0,\ p'(2)=p(2)\} \quad \text{in}\\
V &:= \{p \in P_3(\mathbb{R});\ p''(1)=p'(1)\}.
\end{aligned}$$

Poišči baze prostorov U, V, $U \cap V$ in $U+V$.

3. Naj bo n naravno, a pa realno število. Izračunaj naslednjo determinanto velikosti $n \times n$:

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\
1 & 0 & a & a & \dots & a\\
1 & a & 0 & a & \dots & a\\
\vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots\\
\vdots & \vdots & & & \ddots & a\\
1 & a & a & \dots & a & 0
\end{vmatrix}.$$

4. Dana je matrika

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in množica

$$\mathcal{M} := \{X \in M_3(\mathbb{R});\ XA = AX^{\mathsf{T}}\}\ .$$

Pokaži, da je množica $\mathcal{M}$ vektorski podprostor v prostoru $M_3(\mathbb{R})$, poišči njegovo razsežnost in kakšno bazo.