2. kolokvij, 1994

1. Za neko kompleksno kvadratno matriko $A \in M_n(\mathbb{C})$ vemo, da jo lahko zapišemo kot produkt ortogonalne in simetrične matrike. To pomeni, da obstajata taki matriki Q in S iz $M_n(\mathbb{C})$, da hkrati velja

$$A = QS,\ Q^\top Q = I,\ S^\top = S,$$

kjer I pomeni identično matriko.

(a) Pokaži, da sta si tedaj matriki $A^\top A$ in $AA^\top$ podobni.

(b) S pomočjo točke (a) pokaži, da se matrika

$$B := \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ne da razcepiti na produkt ortogonalne in simetrične matrike.

2. Naj bodo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ dana kompleksna števila. Določi tiste $\lambda \in \mathbb{C}$, za katere je sistem enačb

$$\begin{aligned} \lambda x_i + a_i x_{n+1} &= b_i \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \lambda x_{n+1} &= b_{n+1} \end{aligned}$$

enolično rešljiv in ga nato reši.

3. Naj bo $ABCD$ poljuben paralelogram. Točke T, S, U in R naj ležijo zaporedoma na daljicah AB, BC, CD in DA tako, da je daljica RS vzporedna stranici AB, daljica TU pa vzporedna stranici BC. Pokaži, da so tedaj premice, ki nosijo TS, AC in RU bodisi vzporedne bodisi se sekajo v eni točki. Kdaj so te premice vzporedne?

4. Kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ naj ima za spodnjo osnovno ploskev kvadrat $ABCD$, točke A_1, B_1, C_1 in D_1 pa naj zaporedoma ležijo nad točkami A, B, C in D. Skozi središče ploskve $A_1B_1C_1D_1$, središče ploskve ABA_1B_1 in razpolovišče daljice BC potegnemo ravnino Σ. V kakšnem razmerju seka ravnina Σ stranico AB?

2. kolokvij, 1995

1. Naj bosta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna. Reši enačbo

$$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{x} + (\vec{b} \cdot \vec{x})\vec{a}\,.$$

2. Dana je tristrana piramida $ABCD$. Točka T naj bo težišče trikotnika BCD. Točka E naj bo razpolovišče daljice AB, točka F razpolovišče daljice AC, točka G pa naj deli daljico AD v razmerju $AG : GD = 1 : 4$. Daljica AT prebode trikotnik EFG v točki S. Določi razmerje $AS : ST$.

3. Določi tiste $\lambda \in \mathbb{R}$, za katere je rešljiv sistem n enačb z n neznankami:

$$\begin{aligned} x_1 + \lambda x_n &= 1 \\ -(i-1)x_{i-1} + ix_i + \lambda x_n &= i \quad ; \quad i = 2, 3, \ldots, n-1 \\ -(n-1)x_{n-1} + \lambda x_n &= n \end{aligned}$$

in ga nato reši.

4. Dana je matrika

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj $(6A^{-1} + A^2)^{1995}$.

2. kolokvij, 1996

1. V prostoru $\mathbb{R}^3$ je dan enakokrak trapez $ABCD$ s krakoma $BC = AD$. Osnovnica AB je dvakrat daljša od osnovnice CD. Točka E leži na razpolovišču kraka AD. V kakšnem razmerju se sekata diagonala AC in daljica BE?

2. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna vektorja iz prostora $\mathbb{R}^3$. Kateri vektorji $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ rešijo enačbo

$$[\vec{x}, \vec{a}, \vec{b}] = \vec{x} \times \vec{b} + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} \times \vec{b}\,?$$

Pri tem $[\vec{x}, \vec{a}, \vec{b}]$ pomeni mešani produkt

$$[\vec{x}, \vec{a}, \vec{b}] = (\vec{x} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{x} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})\,.$$

3. Naj bo λ poljubno realno število. Reši naslednji sistem enačb:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & + & (1+\lambda)x_2 & + & (2-\lambda)x_3 & + & \lambda x_4 & = & 3 \\ \lambda x_1 & - & x_2 & + & (2-\lambda)x_3 & + & \lambda x_4 & = & 2 \\ \lambda x_1 & + & \lambda x_2 & + & (2-\lambda)x_3 & + & \lambda x_4 & = & 2 \\ \lambda x_1 & + & \lambda x_2 & + & (2-\lambda)x_3 & - & x_4 & = & 2 \end{array}$$

4. Naj bo A realna matrika z m vrsticami in n stolpci ter b stolpec velikosti n.

(a) Za sistem enačb $Ax = b$ vemo, da je enolično rešljiv. Kaj lahko poveš o m in n? Koliko parametrična je rešitev sistema $A^\top y = 0$?

(b) Dokaži: če je sistem $Ax = b$ (ne nujno enolično) rešljiv, potem za vsako rešitev y sistema $A^\top y = 0$ velja $y^\top b = 0$.

2. kolokvij, 1997

1. Premice p, q in r potekajo skozi izhodišče $(0,0,0)$ in imajo zaporedoma smerne vektorje $(0,1,0)$, $(1,0,1)$ in $(1,0,-1)$. Določi enačbo ravnine Π, ki seka premice p, q in r zaporedoma v točkah A, B in C velja: lik ABC je enakostranični trikotnik s ploščino $9\sqrt{3}$ in prvi dve koordinati točk A, B in C sta nenegativni.

2. Vektorja $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ sta enako dolga in oklepata kot 120^o. Za katere vektorje $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ velja enakost

$$(\vec{a}\vec{x})\vec{b} + 2\vec{b} \times \vec{x} = \vec{x} \times \vec{a}\,?$$

3. V odvisnosti od realnega parametra λ reši naslednji sistem enačb:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & & & = & 1 \\ x & - & 2y & + & & - & t & = & -1 \\ 2x & + & 4\lambda y & + & z & - & t & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & 2\lambda z & + & 2t & = & 3 \end{array}$$

4. Dani sta matriki

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iz njiju sestavimo bločno matriko

$$A = \begin{bmatrix} I & E & 0 \\ E & I & E \\ 0 & E & I \end{bmatrix}.$$

Za vsako naravno število n izračunaj $(A^2 + A^{-1} - 3A)^n$.

2. kolokvij 1998

1. Naj bo $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in

$$A = \begin{bmatrix} I & N & 0 \\ N & I & N \\ 0 & N & I \end{bmatrix}.$$

Za vsako naravno število n izračunaj $(A + A^{-1})^n$.

2. Dana sta matrika A velikosti $2n \times 2n$ stolpec b velikosti $2n$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & 1 & & & \\ & 2 & & 2 & & & \\ & & \ddots & \vdots & & & \\ 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n \\ & & & \vdots & \ddots & & \\ & & & 2n-1 & & 2n-1 & \\ & & & 2n & & & 2n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 2n-2 \\ 2n-1 \\ 2n \end{bmatrix}.$$

Reši sistem enačb $Ax = b$.

3. V tetraedru $ABCD$ je točka E razpolovišče stranice BD, točka F razpolovišče stranice CD, točka G pa težišče ploskve ABC. V kakšnem razmerju odreže trikotnik AEF daljico DG?

4. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enako dolga vektorja v prostoru $\mathbb{R}^3$, ki oklepata kot 60^o. Reši vektorsko enačbo

$$(\vec{a} \cdot \vec{x})\vec{a} + (\vec{b} \cdot \vec{x})\vec{b} + \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{x}\,.$$

2. kolokvij, 1999

1. Za vsako realno število a izračunaj rang matrik

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & a+1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -a & 3 & 1+a \\ -2-a & 4 & 5+a \end{bmatrix}$$

in pokaži, da sta matriki ekvivalentni.

2. Za dano naravno število n reši naslednji sistem enačb.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & \dots & + & x_{n-1} & + & x_n & = & 1 \\
x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & + & \dots & + & x_{n-1} & + & x_n & = & 2 \\
x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & + & \dots & + & x_{n-1} & + & x_n & = & 3 \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & \dots & + & x_{n-1} & & & = & n
\end{array}$$

3. V tristrani piramidi $ABCD$ je točka E težišče ploskve BCD. Točke F, G in H zaporedoma delijo stranice AB, AC in AD v razmerjih $1:2$, $2:3$ in $1:4$. Naj bo Σ ravnina skozi točke F, G in H. V kakšnem razmerju odreže ravnina Σ daljico AE?

4. Določi kot med vektorjema $\vec{m}$ in $\vec{n}$, če veš, da je vektor $\vec{a} = \vec{m} + 3\vec{n}$ pravokoten na vektor $\vec{b} = 7\vec{m} - 5\vec{n}$ in je vektor $\vec{c} = \vec{m} - 4\vec{n}$ pravokoten na vektor $\vec{d} = 7\vec{m} - 2\vec{n}$.

2. kolokvij, 2000

1. Dana je matrika

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Reši matrično enačbo $NX = XN$.

2. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Kakšna zveza mora veljati med parametroma a in b, da bosta matriki A in B ekvivalentni?

(b) Določi parametra a in b tako, da bosta matriki A in B podobni. Izračunaj tudi matriko P, za katero je $A = PBP^{-1}$.

3. V odvisnosti od parametra λ obravnavaj in reši naslednji homogeni sistem linearnih enačb:

$$\begin{array}{rcrcrcl} (7-\lambda)x & + & (\lambda-1)y & + & 2z & = & 0 \\ \lambda x & + & 4y & + & z & = & 0 \\ 6x & + & (\lambda+2)y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

4. V tristrani piramidi $ABCD$ z osnovno ploskvijo ABC je točka E težišče ploskve BCD, točka F pa razpolovišče stranice AC. Točka X leži na daljici FD tako, da se daljici BX in AE sekata. V kakšnem razmerju deli točka X daljico FD?

2. kolokvij, 2001

1. A, C in E so kvadratne obrnljive matrike enake velikosti, 0 je ničelna matrika, bloka B in D pa sta matriki primerne velikosti. Poišči inverz bločno podane matrike

$$\begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & C & D \\ A & B & E \end{bmatrix}.$$

2. Dani sta matriki

$$A := \begin{bmatrix} a & 2 \\ b & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Kaj mora veljati za parametra a in b, da bosta matriki A in B ekvivalentni?

(b) Določi števili a in b tako, da bosta matriki A in B podobni. Nato poišči kakšno obrnljivo matriko P, da bo veljalo

$$A = PBP^{-1}.$$

3. Glede na vrednost parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ obravnavaj naslednji sistem enačb:

$$\begin{aligned} (\lambda+1)x + y + z + (\lambda+1)u &= 0 \\ x + (\lambda+1)y + z + (\lambda+1)u &= 0 \\ \lambda y + \lambda z + 2u &= 0 \\ x + y + (1+\lambda)z + (1+\lambda)u &= 0 \end{aligned}$$

4. Paralelepiped $ABCDA'B'C'D'$ ima za osnovno ploskev paralelogram $ABCD$, točke A', B', C' in D' pa zaporedoma ležijo nad točkami A, B, C in D. Točka E je presek diagonal ploskve $BCC'B'$. V kakšnem razmerju odreže paralelogram $BB'D'D$ daljico AE?

2. kolokvij, 2003

1. Poišči vse rešitve matrične enačbe

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. Naj bo dano realno število a in matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a+1 & -1 \\ 2 & a+3 & a^2-3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Poišči rang matrike A v odvisnosti od parametra a.

(b) Za katere parametre a je matrika A obrnljiva? V primeru $a = 0$ izračunaj tudi inverz.

3. V odvisnosti od parametra $\alpha \in [0, \pi)$ poišči vse rešitve sistema enačb:

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & y\cos\alpha & + & z\cos 2\alpha & = 0 \\ x\cos\alpha & + & y\cos 2\alpha & + & z\cos 3\alpha & = 0 \\ x\cos 2\alpha & + & y\cos 3\alpha & + & z\cos 4\alpha & = 0 \end{array}$$

(Morda ti pomagajo formule: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$,
$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$.)

4. V tristrani piramidi so točke E, G in H zaporedoma razpolovišča robov BC, BD in AD. Točka F je presečišče daljic AG in BH, točka S pa presečišce trikotnika AED z daljico CF. V kakšnem razmerju točka S deli daljico CF?

2. kolokvij, 2004

1. Naj bosta A in I matriki velikosti 3×3, pri čemer je I identična matrika in velja $\det(A+I) = 16$.

(a) Ali je rešljiva matrična enačba

$$A(X+I) = I - X?$$

Če je, koliko rešitev ima?

(b) Reši zgornjo matrično enačbo za primer, ko je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Dani sta matriki

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad Y = \begin{bmatrix} a & -2 \\ b & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Za katere parametre a in b sta matriki ekvivalentni?

(b) Kdaj sta si podobni?

3. V odvisnosti od parametrov a in b reši sistem enačb:

$$\begin{aligned} ax + by + 2z &= 1 \\ ax + (2b-1)y + 3z &= 1 \\ ax + by + (b+3)z &= 2b - 1 \end{aligned}$$

4. V enakokrakem trapezu $ABCD$ s krakoma AD in BC je osnovnica AB dvakrat daljša od osnovnice CD. Točke A, B in D imajo zaporedoma koordinate $(-1, 0, -3)$, $(1, 8, -1)$ in $(1, -1, 0)$.

(a) Določi koordinate točke C.

(b) V kakšnem razmerju se sekata trapezovi diagonali?