3. kolokvij, 1994

1. Dana je preslikava $A\colon\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,

$$A\colon\ (a,b,c,d) \mapsto (c,c,a+b,d)\,.$$

Pokaži, da je linearna, zapiši njeno matriko v standardni bazi in poišči njene lastne vrednosti in lastne vektorje.

2. Naj bo A preslikava, ki vsako točko $T \in \mathbb{R}^3$ prezrcali čez premico $2x = y = 4z$. Zapiši matriko za A v standardni bazi in poišči njene lastne vrednosti in lastne vektorje.

3. (a) Naj bo x lastni vektor linearne preslikave A pri lastni vrednosti λ. Pokaži, da je za vsako število $k \in \mathbb{N}$ vektor x tudi lastni vektor preslikave A^k. Katera lastna vrednost mu pripada?

(b) Pokaži, da nilpotenten operator nima lastnih vrednosti različnih od 0. (Operator N je *nilpotenten*, če obstaja tako naravno število r, da je $N^r = 0$.)

4. Za linearni funkcional $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ velja:

$$\begin{aligned} f(1,1,-1) &= 2\,,\\ f(3,-1,-1) &= 4\,,\\ f(-5,1,3) &= 6\,. \end{aligned}$$

Koliko je $f(x,y,z)$, kjer je (x,y,z) poljuben vektor v $\mathbb{R}^3$?

3. kolokvij, 1995

1. Skozi točko $T(1,2,-1)$ položi premico p, ki seka premici q in r, podani z enačbama

$$q\colon\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+3}{3}\,, \qquad r\colon\ \frac{x-2}{3} = y = -z-3\,.$$

2. Naj bo $A \in M_3(\mathbb{R})$ dana matrika in $\mathcal{T}\colon\ M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ preslikava, podana takole:

$$\mathcal{T}(X) := AX\,.$$

Pokaži, da je $\mathcal{T}$ linearna preslikava. Poišči njeno matriko v bazi

$$\{E_{11}, E_{21}, E_{31}, E_{12}, E_{22}, E_{32}, E_{13}, E_{23}, E_{33}\}\,,$$

kjer je E_{ij} matrika, ki ima na i,j-tem mestu enko, drugje pa ničle. Kdaj je preslikava $\mathcal{T}$ bijektivna? V tem primeru poišči njen inverz.

3. Dana je matrika $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poišči njene lastne vrednosti in lastne vektorje, podobno diagonalno matriko in ustrezno prehodno matriko.

Če ne znaš rešiti naloge v splošnem, jo reši vsaj za $n = 4$. ([15 %])

4. Poišči matriko linearne preslikave $\mathcal{A}\colon\ P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ v standardnih bazah, če veš:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(3x^2+2x+1) &= 2x^2-3 \\ \mathcal{A}(x^3+4x^2+3x+2) &= x^2+x+2 \\ \mathcal{A}(x^3+6x^2+4x+3) &= x^2-x \\ \mathcal{A}(x^3+x^2+x) &= x+1 \end{aligned}$$

Poišči tudi jedro preslikave $\mathcal{A}$.

3. kolokvij, 1996

1. V prostoru $\mathbb{R}^3$ leži valj z osjo

$$x = 0,\ y = z$$

in polmerom 2. Poišči premici skozi točko $A(2,2,0)$, ki sta vzporedni ravnini $x+y+z=2$ in se dotikata valja.

2. Preslikava $D\colon\ P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ je odvajanje na prostoru polinomov stopnje največ dva, $D(p) = p'$; preslikavi $A\colon\ P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ pa v bazi $\{1, x+x^2, x-x^2\}$ ustreza matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kateri polinomi ležijo v jedru preslikave DA, kateri polinomi ležijo v sliki preslikave DA?

3. V prostoru $\mathbb{R}^3$ sta dani bazi

$$\mathcal{A} = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\} \quad \text{in} \quad \mathcal{C} = \{(1,1,1),(0,1,0),(0,1,1)\},$$

v prostoru $\mathbb{R}^2$ pa bazi

$$\mathcal{B} = \{(1,1),(0,1)\} \quad \text{in} \quad \mathcal{S} = \{(1,0),(0,1)\}\,.$$

Linearni preslikavi $A\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ pripada iz baze $\mathcal{A}$ v bazo $\mathcal{B}$ matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kakšna matrika ji pripada iz baze $\mathcal{C}$ v bazo $\mathcal{S}$?

4. Diagonaliziraj matriko

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. kolokvij, 1997

1. Za dano realno število λ tvorimo matriko

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Preslikava $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ je dana s predpisom

$$T(X) := AX - XA .$$

Pokaži, da je preslikava T linearna. Poišči matriko, ki preslikavi T pripada v standardni bazi prostora matrik $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, kjer ima matrika E_{ij} na i, j-tem mestu enko, drugod pa ničle. Določi tudi razsežnost jedra preslikave T v odvisnosti od parametra λ.

2. Naj bo $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pravokotna projekcija na premico $x = 2y = z$, $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pa pravokotna projekcija na abcisno os. Preslikava R naj bo definirana kot vsota $P+Q$. Katera matrika ustreza preslikavi R v standardni bazi? Poišči bazo jedra in slike preslikave R.

3. Naj bosta A in B linearni preslikavi iz prostora realnih polinomov stopnje največ dva vase. Preslikava A je podana s pravilom

$$(Ap)(t) := p'(t) + tp(0) ,$$

preslikavi B pa v bazi $\{1 + t, 2t - t^2, 1 + t^2\}$ ustreza matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Kolikšna je razsežnost slike produkta AB. Določi $AB(2 - t^2)$.

4. Določi lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

3. kolokvij, 1998

1. Poišči premico, ki je vzporedna ravninama

$$x - y + 2z = 2 \quad \text{in} \quad x + 3z = 6$$

in seka premici

$$x = 2, \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2} \quad \text{in} \quad 1 - x = \frac{y+2}{2} = z .$$

2. Naj bo a dano realno število. Preslikava A, ki slika iz prostora polinomov stopnje največ dva v prostor $\mathbb{R}^3$, je podana s predpisom

$$A\colon\ p \mapsto \left(p'(0) + a, 2p(0) + p(1), 3\int_0^1 p(t)dt\right).$$

Najprej določi parameter a tako, da bo preslikava A linearna. Nato zapiši matriko, ki preslikavi A ustreza v standardnih bazah obeh prostorov in določi bazo jedra preslikave A.

3. Poišči matriko v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$, ki ustreza pravokotni projekciji na premico

$$x = \frac{y}{2} = z\,.$$

Kaj je jedro in kaj je slika te preslikave?

4. Preslikavi $\mathcal{C}\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ustreza iz standardne baze prostora $\mathbb{R}^3$ v bazo

$$\{(1,1,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$$

matrika

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

preslikavi $\mathcal{D}\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pa iz standardne baze prostora $\mathbb{R}^3$ v bazo

$$\{(1,2,0),(2,5,1),(1,3,0)\}$$

ustreza matrika

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Katera matrika ustreza kompozitumu preslikav $\mathcal{C} \circ \mathcal{D}$ v standardnih bazah prostora $\mathbb{R}^3$?

3. kolokvij, 1999

1. Naj bosta premici p in q podani z enačbama

$$p\colon\ x = 2y = z\,, \quad q\colon\ \frac{3x-6}{4} = 3y - 3 = \frac{3z-6}{8}\,.$$

Pokaži, da se premici p in q sekata ter poišči vse ravnine, glede na katere sta si zrcalni.

2. Dana je ravnina

$$\Pi\colon\ x + 2y - z = 0$$

in točki $P(2,-1,2)$, $Q(0,3,0)$. Poišči množico točk v ravnini Π, ki so od točk P in Q enako oddaljene.

3. Naj bo $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, ki za vsak $i \in \{1,2,3\}$ vektor $\vec{a}_i$ preslika v vektor $\vec{b}_i$, kjer so

$$\vec{a}_1 = (1,1,0),\ \vec{a}_2 = (0,1,-1),\ \vec{a}_3 = (1,2,0),$$
$$\vec{b}_1 = (1,0,0),\ \vec{b}_2 = (2,2,-2),\ \vec{b}_3 = (0,3,0).$$

Poišči matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardni bazi.

4. Funkcionali f_1, f_2 in f_3 na prostoru $P_2(\mathbb{R})$ polinomov stopnje največ dva so podani s formulami

$$f_1(p) := \int_0^1 p(t)\,dt\,, \quad f_2(p) := p'(1)\,, \quad f_3(p) := \int_0^1 tp'(t)\,dt\,.$$

Dokaži, da tvorijo bazo prostora funkcionalov $P_2(\mathbb{R})^*$.

3. kolokvij, 2000

1. Naj bosta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enotska vektorja, ki oklepata kot 120^o. Reši vektorsko enačbo

$$(\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{b} = \vec{a} + (\vec{x} \cdot \vec{b})\vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}\,.$$

2. Ravnina Σ vsebuje premico

$$p\colon\ x - 1 = 2y - 2 = z + 1$$

in se dotika nekega valja $\mathcal{V}$ z osjo $x = y = z$. Določi enačbo ravnine Σ in polmer valja $\mathcal{V}$.

3. Dano je realno število a in matrika

$$A := \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}.$$

Preslikava $\mathcal{T}\colon\ M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ je podana s pravilom

$$\mathcal{T}(X) := AX - XA\,.$$

(a) Pokaži, da je preslikava $\mathcal{T}$ linearna.

(b) Določi matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{T}$ v standardni bazi matrik

$$\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}\,.$$

Pri tem E_{ij} pomeni matriko, ki ima na križišču i-te vrstice in j-tega stolpca enko, drugod pa ničle.

(c) Poišči bazo jedra in zaloge vrednosti preslikave $\mathcal{T}$ v odvisnosti od parametra a. Ali je v kakšnem primeru preslikava $\mathcal{T}$ obrnljiva?

4. Določi matriko, ki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ ustreza zrcaljenju čez premico

$$x = \frac{y}{2} = z.$$

3. kolokvij, 2001

1. Napiši enačbo premice p, ki je zrcalna slika premice

$$q\colon\ 1-x=\frac{y-3}{2}=z$$

glede na ravnino

$$\Sigma\colon\ x-3y+2z=3\,.$$

2. Premica p je presek ravnin

$$\Sigma\colon\ x-y+z=1 \quad \text{in} \quad \Pi\colon\ 3x+2y-z=4\,.$$

Napiši enačbo ravnine Ω, ki vsebuje premico p in oklepa z ravnino Σ kot 60°. Kakšen kot oklepa ravnina Ω z ravnino Π? Koliko je rešitev?

3. Preslikava $A\colon\ P_2(\mathbb{R})\to P_2(\mathbb{R})$ je podana s predpisom

$$(Ap)(t):=\frac{4}{t}\int_0^t p(s)\,ds-(p(t)t)'\,.$$

(a) Pokaži, da je preslikava A linearna.

(b) Napiši matriko, ki preslikavi A ustreza v standardnih bazah $\{1,t,t^2\}$ prostorov $P_2(\mathbb{R})$.

(c) Poišči kakšni bazi jedra in slike preslikave A.

4. Napiši matriko, ki v standardni bazi prostorov $\mathbb{R}^3$ ustreza linearni preslikavi $A\colon\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, ki preslika

$$\begin{aligned}(1,-1,-1)&\mapsto(3,1,1)\,,\\(1,1,-1)&\mapsto(2,0,1)\,,\\(1,0,2)&\mapsto(-1,2,1)\,.\end{aligned}$$

3. kolokvij, 2002

1. Dan je trikotnik z oglišči $A(1,-1,2)$, $B(2,1,2)$ in $C(3,-2,2)$. Poišči središče trikotniku ABC včrtanega kroga.

2. Dani sta premici

$$p\colon\ x=y=z \ \text{ in } \ q\colon\ \frac{x}{2}=-y=\frac{z}{3}\,.$$

(a) Poišči enačbo ravnine Σ, ki vsebuje obe premici.

(b) Poišči matriko, ki ustreza pravokotni projekciji na ravnino Σ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$. Kakšne so njene lastne vrednosti in lastni vektorji?

3. Dana je preslikava $A\colon\ P_2(\mathbb{R})\to P_2(\mathbb{R})$,

$$(Ap)(t)=(t^2+2t)p''(t)-2(p(t)+p'(t))\,.$$

(a) Pokaži, da je preslikava A linearna.

(b) Poišči matriko, ki preslikavi A ustreza v bazi $\{1+t, 1-t, t^2+t\}$.

4. Na prostoru polinomov stopnje največ dva so dani funkcionali:

$$\begin{aligned} f_1(p) &= p(0) + p''(0), \\ f_2(p) &= p'(1), \\ f_3(p) &= p''(2) + p'(-1). \end{aligned}$$

Poišči matrike, ki jim ustrezajo v standardnih bazah in pokaži, da funkcionali tvorijo bazo prostora $P_2(\mathbb{R})^*$.

3. kolokvij, 2003

1. Naj bodo vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \in \mathbb{R}^3$ paroma pravokotni in $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 2$. Izračunaj prostornino tetraedra, napetega na vektorjih

$$\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b},\ \vec{q} = \vec{c} - 2\vec{a},\ \vec{r} = 2\vec{b} - \vec{c}.$$

2. Naj bo A preslikava iz prostora realnih polinomov stopnje največ dva $P_2(\mathbb{R})$ vase. Podana je s pravilom

$$(Ap)(t) := tp'(t) - p(t).$$

(a) Pokaži, da je preslikava A linearna.

(b) Določi matriko, ki ji pripada v standardni bazi $\{1, t, t^2\}$.

(c) Poišči kakšni bazi jedra in slike preslikave A.

3. (a) Preslikava $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je zrcaljenje čez premico

$$x = \frac{y}{2} = -\frac{z}{2}.$$

Določi matriko, ki pripada preslikavi A v standardnih bazah.

(b) Preslikavi $B\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pa iz baze $\{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ v standardno bazo ustreza matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Katera matrika ustreza preslikavi $A \circ B$ v standardnih bazah?

4. Naj bo S sfera določena z enačbo $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2$ in p premica, ki je presek ravnin $x + z = 2$ in $5x - 2z = 3$.

(a) Pokaži, da imata S in p natanko eno skupno točko.

(b) Poišči enačbe vseh ravnin skozi izhodišče koordinatnega sistema, ki se dotikajo S, so vzporedne p in ne vsebuijejo p.